Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2017

Diana da Conceição da Costa Leal Ramalho

Recursos Digitais para diagnóstico e avaliação dos Sistemas de duas equações lineares no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2017

Diana da Conceição da Costa Leal Ramalho

Recursos Digitais para diagnóstico e avaliação dos Sistemas de duas equações lineares no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula Sousa Oliveira, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e do Doutor Luís Descalço, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president

Prof. Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz
professor auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

Prof. Doutor José João A. G. Dias de Almeida
professor auxiliar do Departamemto de Informática da Universidade do Minho

Prof. Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira
professora auxiliardo Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos / acknowledgements

Quando nos deparamos com novos desafios não podemos ter a pretensão de o fazermos sozinhos. Muitas vezes essa caminhada não é fácil, e por isso a colaboração é fundamental. Assim, gostaria de agradecer a todos os que acompanharam o desenvolvimento deste desafio, e sem os quais teria sido muito difícil ter concretizado esta tarefa.
Agradeço à Doutora Paula Oliveira, minha orientadora, de uma forma muito especial, pelo apoio incondicional, disponibilidade, incentivo, entusiasmo contagiante e a contribuição decisiva na orientação desse trabalho.
Ao Doutor Luís Descalço, meu co-orientador, pelo acompanhamento ao longo deste desafio.
Obrigada a ambos pela capacidade de partilharem conhecimentos.
Ao Mestre Jorge Mariño e à Mestre Sandra Ramos, colaboradores do PmatE, pela sabedoria e experiência partilhados, fundamentais na construção dos recursos digitais.
À direção do Agrupamento de Escolas onde desenvolvi o meu estudo, pela recetividade em cooperar.
Aos alunos das duas turmas do 8.º ano do Agrupamento de Escolas que lecionei no ano letivo 2016/2017, e respetivos encarregados de educação, pela disponibilidade que mostraram em colaborar neste estudo.
À Marta, minha amiga e companheira desta e outras caminhadas, pelo apoio e parceria em todos os momentos deste desafio.
À minha amiga Vera, pelo incentivo, interesse e disposição em colaborar sempre que solicitada a sua ajuda.
Aos meus pais e irmã por estarem sempre presentes e serem fiéis cooperantes de todos os meus desafios.
Ao meu marido por todo o apoio imensurável que me deu e pela forma carinhosa com que sempre me acompanha.
Às minhas filhas Maria Beatriz e Maria Francisca, minhas fontes inspiradoras, a quem mesmo não dedicando toda a atenção que tanto mereciam, estiveram sempre comigo, sendo as primeiras responsáveis pela força para continuar.
A todos, agradeço reconhecidamente.

Palavras Chave

Gamificação, recursos digitais, ensino, matemática, sistemas de equações lineares, questões de escolha múltipla, exercícios parametrizados

Resumo

A educação e a formação são fatores insubstituíveis de desenvolvimento económico e tecnológico, da coesão social, do desenvolvimento pessoal e do exercício pleno da cidadania.

Apesar dos programas e medidas implementados ao longo dos tempos, o abandono e o insucesso escolares continuam por resolver com a eficácia e eficiência que seriam desejáveis.

Neste contexto surge a Gamificação, que tem vindo a ganhar visibilidade pela sua capacidade de criar experiências significativas quando aplicada em contextos da vida cotidiana. Recentemente, a sua aplicação na educação, justifica uma reflexão aprofundada, com a finalidade de descobrir os melhores caminhos para a sua utilização, nomeadamente na sua aplicação com vista a promover o sucesso, concretamente na disciplina de matemática.

A presença de recursos educativos digitais na aula de matemática não é uma novidade. Atualmente, as plataformas de ensino assistido são poderosas ferramentas de trabalho às quais os docentes se têm vindo a aliar no sentido de melhorarem o ensino-aprendizagem.

O presente trabalho tem por base o enquadramento teórico dos Sistemas de duas equações lineares, ao nível do ensino básico, e refere-se ao desenvolvimento de recursos digitais de apoio a este subdomínio da Álgebra. O estudo realiza-se ao longo do ano letivo 2016/2017 e foi utilizada a plataforma PmatE, desenvolvida na Universidade de Aveiro, para a conceção de exercícios parametrizados.

Os recursos digitais construídos consistem num banco de questões parametrizadas de escolha múltipla, que permite ao aluno potenciar a aquisição e consolidação de conceitos, desenvolver a autonomia e autorregular as suas aprendizagens.

Este estudo é meramente um ponto de partida para investigações mais aprofundadas sobre a integração de recursos digitais na educação matemática.

Keywords

Gamification; digital resources, teaching, mathematics, systems of linear equations, parameterized exercises, Project “Matemática Ensino” (PmatE)

Abstract

Education and training are irreplaceable factors of economic and technological development, social cohesion, personal development and the full exercise of citizenship.
Despite programmes and measures implemented throughout the year, school drop-out and failure remain to be solved with the effectiveness and efficiency that would be desired.
In this context comes the Gamification, which has gained visibility for its ability to create meaningful experiences when applied in contexts of everyday life. Recently, its application in education, justifies an in-depth reflection, with the purpose of discovering the best ways to use it, namely in its application to promote success, specifically in mathematics.
The presence of digital educational resources in math class is not new. Currently, assisted learning platforms are powerful working tools which teachers have embraced in order to improve teaching and learning.
The present work is based on the theoretical framework of the Systems of two linear equations, at the level of basic education, and refers to the development of digital resources to support this subdomain of Algebra. The study is carried out throughout the academic year 2016/2017 and the PmatE platform, developed at the University of Aveiro, was used to design parameterized exercises.
The built digital resources consist of a bank of parameterized questions of multiple choice, which allows the student to promote the acquisition and consolidation of concepts, develop autonomy and self-regulate their learning.
This study is merely a starting point for further research on the integration of digital resources into mathematics education.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Em contexto educativo há uma necessidade frequente de atualização das práticas pedagógicas de modo a adequar os processos de ensino-aprendizagem às características dos alunos e promover o sucesso educativo.

O papel inovador e transformador assumido pelo desenvolvimento tecnológico, a utilização cada vez mais intensa da gamificação na sociedade em geral e na educação em particular, concretamente na educação matemática e o desenvolvimento de Plataformas de Ensino Assistido são áreas emergentes em contexto educativo, que motivaram a elaboração deste trabalho.

Tomando como ponto de partida a procura da diversificação e validação de novas práticas pedagógicas que possam contribuir para o sucesso educativo dos alunos, o presente trabalho, intitulado Recursos Digitais para diagnóstico e avaliação dos Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas no 3º Ciclo do Ensino Básico, tem como objetivos primordiais proceder à análise da gamificação e das Plataformas de Ensino Assistido no processo ensino/aprendizagem e em particular no ensino da Matemática, fornecer aos alunos uma ferramenta eficiente e atrativa de aprendizagem, bem como ajudar os docentes a promover uma aprendizagem mais interativa, dinâmica e eficaz, dentro e fora da sala de aula.

A dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos, sendo estes Introdução, Gamificação na educação matemática: motivação e diagnóstico, Utilização de uma plataforma de ensino assistido no ensino da matemática no 3º ciclo, Recursos digitais desenvolvidos - questões parametrizadas na matemática e Conclusão e trabalho futuro.

Neste capítulo introdutório apresenta-se a pertinência da investigação, procedendo-se à apresentação geral do trabalho.

No segundo capítulo é feita uma abordagem à definição de gamificação e contextos de aplicação, sendo ainda apresentada a sua importância em contexto educativo, concretamente na educação matemática.

No terceiro capítulo procede-se à análise das Plataformas de Ensino Assistido como ferramentas de ensino da Matemática no 3º ciclo. É também apresentada a metodologia de investigação descrevendo-se as diversas etapas da mesma e a forma como foram realizadas, sendo posteriormente feita uma análise aos resultados obtidos com a execução do projeto.

No quarto capítulo expõe-se os conteúdos do subdomínio de Álgebra, Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, que sustentam a construção de recursos na plataforma ModelMaker do Projeto Matemática Ensino.

No quinto e último capítulo são tecidas as considerações finais deste trabalho, abordando algumas limitações e apontando sugestões para trabalhos futuros.

Para além destes capítulos fazem ainda parte da dissertação, a bibliografia e os anexos.

CAPÍTULO 2

Gamificação na Educação Matemática: Motivação e Diagnóstico

2.1 Gamificação

A gamificação consiste na aplicação de elementos presentes nos jogos, em contextos que não são jogos [1], [2], para promover o engajamento (maior empenho e motivação) das pessoas e resolver problemas [3], sendo aplicada em áreas tão diversas como negócios, organização, gestão, serviços, saúde, política social e educação.

Por engajamento entende-se uma maior empenho e motivação para com um determinado objetivo.

O termo gamificação começou a ser utilizado a partir de 2010 [4], embora já tenha sido abordado em 2002 por Nick Pelling. A partir da segunda metade do ano de 2010, a gamificação emergiu como uma nova tendência, tendo desde então uma adoção mais generalizada [5]. A sua maior proliferação e adoção no âmbito da aprendizagem e formação dá-se a partir de 2011.

A utilização de elementos essenciais presentes nos jogos tais como a diversão, envolvimento, competitividade e o desafio tem como objetivo alterar comportamentos, promovendo aqueles que são desejados e inibindo os que são indesejados. Forte motivação, elevado envolvimento e a exibição de comportamentos adequados, promovidos pelos jogos, são estados desejáveis na maior parte das atividades humanas como forma de atingir o sucesso [6]. Uma pesquisa de Aberdeen Group revela que organizações que implementaram conceitos de gamificação, melhoraram em 48% o envolvimento dos seus colaboradores e aumentaram em 36% os seus negócios [7].

Em Portugal, o termo gamificação ou, originalmente, gamification, ainda está em crescimento. Apesar de a gamificação ter, inicialmente, encontrado o seu caminho em domínios como o marketing, política, saúde e o fitness, poderá ser também uma preciosa ferramenta nas escolas, uma vez que tenta aproveitar o poder motivacional dos jogos e aplicá-lo a problemas do mundo real [8]. Esta abordagem poder-se-á traduzir em maiores níveis de motivação e envolvimento por parte dos alunos nas matérias lecionadas, facilitando assim a sua aprendizagem.

2.2 GAMIFICAÇÃO NA PERSPETIVA DA EDUCAÇÃO

Fazer com que os alunos se sintam motivados a prestar atenção e a envolver-se na aprendizagem é um dos maiores desafios da Educação.

Dado o potencial de despertar ou aumentar o engajamento e satisfação, escritores e estudiosos têm enaltecido a gamificação como uma forma de transformar a Educação positivamente [9], [10], [11].

A gamificação na perspetiva da educação não é um tema recente. No entanto, nos últimos anos tornou-se um conceito chave, dado o seu elevado potencial.

Na verdade, até recentemente, o termo foi usado por muitos para denotar a adoção do jogo, especialmente digital, como ferramenta educacional para aprender um determinado assunto específico. No entanto a gamificação não envolve necessariamente atividades com jogos, nomeadamente eletrónicos, mas sim a aplicação das mecânicas dos jogos em diferentes contextos, tais como o contexto escolar.

Hoje em dia, as escolas enfrentam grandes problemas no que toca à motivação e envolvimento dos alunos [8]. A gamificação vem oferecer uma oportunidade para ajudar as escolas a ultrapassar este obstáculo. A implementação desta ferramenta no processo educativo parece uma forma muito promissora de motivar intrinsecamente os alunos, mais ainda se estiverem associadas a tecnologias que os fascinam, como é o caso da Realidade Aumentada.

A convicção de que a gamificação apoia e motiva os alunos pode, assim, levar a processos e a resultados de aprendizagem aprimorados [2]. No entanto, é necessária mais compreensão da gamificação dentro da Educação, algo que essencialmente implica a introdução de elementos de jogo na construção de processos de aprendizagem [12]. Na Educação, o potencial da gamificação é imenso: ela funciona para despertar interesse, aumentar a participação, desenvolver criatividade e autonomia, promover diálogo e resolver situações-problema. Assim, a gamificação tornou-se uma das apostas da Educação no século XXI.

Os professores geralmente empregam jogos na sala de aula [2], mas só recentemente começaram a explorar a possibilidade de tornar a aula em si num jogo, aplicando verdadeiramente o conceito de gamificação.

2.3 GAMIFICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O desenvolvimento de capacidades fundamentais de comunicação matemática, a resolução de problemas/tarefas e o raciocínio matemático, quando aliados, permitem o envolvimento ativo do aluno, sendo esta uma condição basilar da aprendizagem matemática [13].

Numa época em que os alunos vivem rodeados de tecnologia interativa e de fácil portabilidade, a atenção e concentração necessárias no processo de construção do conhecimento matemático podem ficar comprometidas, mediante o perfil do aluno. Assim, na atual realidade do aluno, aplicar a mecânica do jogo à sala de aula de forma a aumentar a motivação intrínseca dos alunos para aprender é fundamental [14].

A implementação de tarefas matemáticas estimulantes e desafiadoras encoraja os alunos a participar, facilita a compreensão dos conceitos e desenvolve a comunicação matemática. Assim, a gamificação pode proporcionar uma mudança na visão dos alunos da matemática, e de forma envolvente, dinâmica, atrativa e interativa estimular o ensino, aprendizagem e investigação criativa.

Existe uma teoria que diz que a matemática apenas pode despoletar sentimentos extremos: ou se ama ou se odeia. Mas entre esses dois extremos, é possível encontrar estratégias e recursos pedagógicos que incutam nos alunos uma maior motivação para a aprendizagem da matemática, dilatem o espírito de cooperação e de grupo, desenvolvam a capacidade de trabalhar autonomamente e ainda fomentem uma melhoria da sua autoestima, promovendo assim a aquisição das competências matemáticas nucleares e fundamentais para a vida do quotidiano.

Nesta perspetiva, a utilização de jogos na educação matemática é reconhecida como um recurso pedagógico que permite aos alunos construir e desenvolver as suas competências matemáticas. A aprendizagem através de jogos, como Batalha Naval, Tangram, Sudoku, entre outros, são agentes ativos na construção do conhecimento matemático, reconhecidos há muito tempo pelos docentes. O Jogo Batalha Naval permite trabalhar conceitos de plano cartesiano, sistemas de coordenadas e referencial; o Jogo do 24, desenvolve a capacidade de cálculo mental, assim como trabalha os conceitos de múltiplo e divisor de um número, bem como as propriedades da adição e da multiplicação de números; o Sudoku aprimora o raciocínio lógico-matemático; o Tangram pode explorar conteúdos como área, perímetro, razão, proporção, fração, multiplicação, divisão, semelhança, simetrias, transformações isométricas, etc.

Como forma de incentivar e desenvolver o gosto pela matemática, existem ainda concursos de problemas de Matemática, tais como as Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), presentemente na sua 36º edição, dirigidas aos estudantes dos 1.º, 2.º, 3.º ciclos e ensino secundário. Contudo, as Olimpíadas destinam-se apenas a uma elite de alunos, dada a maturidade matemática exigida e o rigor lógico, a clareza da exposição e a elegância da resolução consideradas na classificação dos participantes.

No entanto, a gamificação é mais do que o jogo em si. Existem então outras ferramentas, como a Plataforma de Ensino Assistido (PmatE) da Universidade de Aveiro, onde são ainda aplicados outros conceitos da gamificação tais como competição, envolvimento e controlo sobre os seus próprios processos de aprendizagem. A existência de provas de treino e o trabalho contínuo ao longo do ano letivo permitem que o aluno tenha uma noção mais concreta da sua evolução, resultando num maior engajamento e incentivando os alunos a investigar e expandir o seu conhecimento.

CAPÍTULO 3

Utilização de uma Plataforma de Ensino Assistido no ensino da matemática no 3.º ciclo

O insucesso escolar em Portugal tem sido, ao longo dos anos, uma problemática fortemente debatida, tendo constituído o objeto de estudo de diversas investigações. Apesar de todas as medidas adotadas ao longo dos tempos, o insucesso continua presente e a marcar fortemente a realidade escolar.

Na tentativa de dar uma resposta eficaz a este problema, com destaque para o insucesso em Matemática, torna-se pertinente para além de conhecer as suas causas, encontrar formas de as combater em todos os graus de ensino, desde o 1º ciclo do Ensino Básico até ao Ensino Superior.

No ensino da matemática, em particular no 3.º ciclo, que "constitui uma importante etapa na formação matemática dos alunos, sendo simultaneamente um período de consolidação dos conhecimentos e capacidades a desenvolver durante o Ensino Básico e de preparação para o Ensino Secundário" [15], a desmotivação, o desinteresse e consequente insucesso é uma problemática recorrente. Assim, motivar os alunos, fomentar o gosto pela Matemática e promover a sua aprendizagem são constantes desafios.

Sabemos que são muitas e variadas as causas potenciadoras de insucesso escolar, concretamente no ensino da matemática no 3º ciclo, sendo por isso essencial privilegiar "uma aprendizagem da Matemática com compreensão, bem como o desenvolvimento da capacidade dos alunos em a utilizar em contextos matemáticos e não matemáticos ao longo da escolaridade, e nos diversos domínios disciplinares, por forma a contribuir para a sua autorrealização enquanto estudante, mas também na sua vida futura pessoal, profissional e social. (...)

O ensino da Matemática neste nível deve ainda proporcionar uma formação que promova nos alunos uma relação positiva com a disciplina, bem como uma visão da Matemática que corresponda à sua natureza enquanto ciência e integre o reconhecimento do seu valor cultural e social, nomeadamente no que se refere ao seu papel no desenvolvimento das diversas ciências, da tecnologia e de outras áreas da atividade humana." [16]

Assim, valorizar a diversidade de metodologias e estratégias no ensino da matemática, em particular o recurso a tecnologias da informação e comunicação (TIC), permite otimizar e tornar mais interativo o processo de aprendizagem e promover o favorecimento do desenvolvimento de competências.

Neste contexto, as Plataformas de Ensino Assistido são sistemas de gestão da aprendizagem que disponibilizam uma série de recursos, síncronos e assíncronos, que dão suporte ao processo de aprendizagem, permitindo seu planeamento, implementação e avaliação. Sendo portanto estas ferramentas tecnológicas muito úteis para a promoção da aprendizagem.

Consciente deste facto, a Universidade de Aveiro desenvolveu um projeto de investigação e desenvolvimento, o Projeto Matemática Ensino (PmatE) cuja missão é a aplicação das TIC e o desenvolvimento de conteúdos e eventos para a promoção do sucesso escolar e da cultura científica. Este projeto foi fundado em 1989 e continua em fase de desenvolvimento. Ao longo destes 28 anos, o PmatE tem vindo a assumir um papel cada vez mais importante no panorama educativo nacional, com os seus eixos de intervenção centrados em projetos de intervenção escolar, na comunicação e divulgação de ciência e na cooperação.

No PmatE é de destacar a Plataforma de Ensino Assistido (PEA), que desde 1990, visa otimizar o processo de ensino/aprendizagem e constitui um espaço de intercâmbio e partilha de recursos, permitindo a inclusão de todos os atores do sistema educativo.

Sendo um espaço inovador e atrativo que oferece um conjunto de potencialidades com o objetivo final de cativar e auxiliar os interlocutores, promovendo o gosto e o sucesso nas diferentes áreas científicas, esta ferramenta de apoio à avaliação, à aprendizagem e ao ensino disponibiliza um repositório de objetos de aprendizagem. Destes destacam-se os Modelos Geradores de Questões (MGQ) utilizados por escolas a nível nacional e que são a base das Competições Nacionais de Ciência (CNC).

As CNC são um conjunto de 12 competições nas áreas de matemática, biologia, física, português, geociências, química e literacia financeira, tendo como objetivos basilares ajudar a combater o insucesso e o abandono escolares, desenvolver os conhecimentos científicos dos estudantes, aumentar o gosto pelo saber, para além de promoverem o uso de computadores, tablets, smartphones, com os treinos disponíveis online.

No cerne da PEA está uma ferramenta designada por Modelo Gerador de Questões (MGQ), que é utilizada para a criação de recursos educativos e para a disponibilização de diferentes tipos de teste diagnóstico, provas de treino, avaliação e nas Competições Nacionais de Ciência.

Os conteúdos desenvolvidos são, portanto, não só um instrumento de apoio ao ensino mas também à aprendizagem e à (auto)avaliação.

Com base nesta plataforma de ensino, têm sido desenvolvidas competições específicas para os vários ciclos de ensino. Para alunos do 3.º ciclo, no âmbito da Matemática, a competição EQUAmat permite desenvolver um vasto conjunto de conteúdos curriculares do 7.º, 8.º e 9.º anos, estimulando o conhecimento científico e aumentando o gosto pelo saber [17], [18].

Este estudo procura assim analisar e testar a PEA como ferramenta de ensino da Matemática, dentro e fora da sala de aula, para os alunos do 3.º Ciclo de Ensino Básico, mais concretamente para alunos do 8.º ano de escolaridade.

3.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS DE UTILIZAÇÃO DA PEA

3.1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO ESTUDO

Num tempo de referências diárias aos problemas da Educação, este estudo pretende colaborar no desenvolvimento da formação do aluno, com a aplicação da Gamificação e o contributo de uma Plataforma de Ensino Assistido – PEA.

Esta investigação pretendeu contribuir para uma análise da utilização da plataforma PmatE no 3º Ciclo do ensino básico, mais concretamente no 8º ano de escolaridade, em contexto de sala de aula e extra aula, no âmbito da disciplina de matemática.

3.1.2 CARACTERIZAÇÃO DO AGRUPAMENTO DE ESCOLAS

O Agrupamento de Escolas que lecionei no ano letivo 2016/2017 engloba sete estabelecimentos de educação do ensino básico, sob tutela do Ministério da Educação e Ciência. A zona onde está inserida carateriza-se, predominantemente, pelo comércio e pela zona de turismo e veraneio do concelho em que se encontra inserida. Em termos de atividades profissionais, na área de influência do Agrupamento de Escolas, predomina o setor secundário, seguido dos setores terciário e primário.

O Agrupamento em questão integra escolas públicas de ensino regular, em regime diurno, contemplando o Pré-escolar, o 1º, 2º e 3º Ciclo do ensino básico, o 2º e 3º Ciclo do ensino básico de música, o 2º Ciclo do ensino básico de dança, unidades de Ensino Estruturado para a Educação de Alunos com Perturbações do Espetro do Autismo, bem como estabelecimentos prisionais.

No Agrupamento são implementados vários projetos/atividades que integram o Plano Anual de Atividades (PAA), que refletem o dinamismo desta comunidade educativa, tendo como um dos objetivos primordiais complementar os conteúdos curriculares e melhorar a formação integral do aluno, abrangendo as dimensões cultural, desportiva, artística e cívica. Para tal, o Agrupamento estabelece contratos de parceria, de forma a desempenhar as necessidades suscitadas pelo seu Projeto Educativo que contribua para a realização de estratégias quer pedagógicas quer administrativas.

Tendo em conta os objetivos estratégicos definidos pelo Agrupamento no Projeto Educativo, considerei que este projeto teria especial relevância na prossecução e desenvolvimento no que concerne a garantir o serviço público de educação, tendo como primeiro propósito criar oportunidades que permitam a todas as crianças e jovens que o frequentam concluir, na diversidade e com qualidade, a escolaridade obrigatória, assente em princípios de equidade, responsabilidade e eficiência e a promover o sucesso escolar, pela adoção de medidas de diferenciação pedagógica, disponibilizando aos alunos os meios necessários para alcançar os objetivos definidos.

Este projeto foi desenvolvido na escola-sede do Agrupamento de Escolas, que por razões de confidencialidade se denomina apenas por Escola.

3.1.3 CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES DO ESTUDO

O trabalho foi desenvolvido em duas turmas do ensino básico, que serão designadas de 8º W e 8º Z.

Tendo por base os planos de turma e dados mais específicos disponibilizados pelas respetivas Diretoras de Turma, foi possível obter informações pertinentes que caracterizassem de forma mais pormenorizada cada um dos alunos e o grupo turma em geral.

A turma W do 8º ano era constituída por vinte e oito alunos, onze raparigas e dezassete rapazes, com idades entre os 12 e os 17 anos. Destes alunos, vinte e quatro frequentaram pela primeira vez o 8º ano e oito alunos apresentavam retenções em anos letivos anteriores. Salienta-se o facto que dos vinte e oito alunos, apenas dois não tinham acesso ao computador e à Internet em casa.

Os alunos desta turma apresentavam altas expectativas para o futuro, tendo uma grande parte, dezasseis alunos, pretensões em obter um curso superior. Somente três alunos pretendiam apenas frequentar um curso profissional e dois alunos ainda não conseguiam perspetivar o seu futuro.

Quanto à turma Z do 8º ano era constituída por vinte alunos, seis raparigas e catorze rapazes, com idades entre os 12 e os 16 anos. Destes alunos, quinze frequentaram pela primeira vez o 8º ano e cinco alunos apresentavam retenções anteriores. Ressalva-se ainda que apenas quatro alunos não tinham computador em casa. No entanto, apenas dez dos alunos do grupo turma tinham acesso à Internet móvel, sendo frequente terem o seu plano de dados esgotado.

Dos vinte alunos que constituíam a turma, três alunos apresentavam Necessidades Educativas Especiais de carácter permanente (NEE), sendo que dois deles beneficiavam da medida educativa de ensino e aprendizagem Currículo Específico Individual (CEI), frequentando a Unidade de Ensino Estruturado para o Apoio à Inclusão de Alunos com Perturbações do Espectro do Autismo existente na escola.

Quanto às expectativas para o futuro, seis alunos desta turma tinham pretensões em obter um curso superior, doze alunos pretendiam finalizar o ensino secundário, dos quais cinco alunos pretendiam para o efeito frequentar o ensino profissional.

3.1.4 TRABALHO DESENVOLVIDO COM OS ALUNOS

Para a realização da investigação descrita nesta dissertação, procedeu-se a apresentação do estudo à direção do Agrupamento e da intenção de o realizar neste estabelecimento de ensino.

Após essa aprovação procedeu-se à divulgação do projeto juntos dos alunos, Diretoras de Turma das turmas intervenientes do estudo, sendo solicitado autorização de participação aos respetivos Encarregados de Educação. Os Encarregados de Educação foram ainda informados que os dados recolhidos seriam usados única e exclusivamente para cumprir o objetivo da investigação, não sendo divulgados por qualquer meio os nomes dos alunos participantes, bem como a identificação da escola, salvaguardando-se, assim, o seu anonimato.

Dos 46 alunos que levaram a autorização de participação neste estudo, 32 responderam afirmativamente (16 alunos de cada turma).

Para a concretização deste estudo, começou-se por aprender a utilizar o PmatE, a dominar os procedimentos da elaboração das provas, identificando, assim, as dificuldades subjacentes ao processo.

De forma a permitir a exploração e familiarização do PmatE, foram aplicadas aos alunos quatro provas construídas na plataforma, uma vez que nenhum dos alunos tinha tido contacto com o projeto anteriormente. Posteriormente procedeu-se à criação aleatória de dois grupos por turma de oito elementos cada.

Grupo	**Turmas**	
	8ºW	**8ºZ**
ST1	Sexo feminino- 2 Sexo masculino- 6	Sexo feminino- 5 Sexo masculino- 3
ST2	Sexo feminino- 5 Sexo masculino- 3	Sexo feminino- 1 Sexo masculino- 7

Tabela 3.1: Distribuição dos alunos por grupos

Foram então elaboradas mais quatro provas corridas, por grupo, no PmatE, uma de avaliação e as três restantes de treino. A escolha do tipo de prova recaiu predominantemente sobre as provas corridas de treino, com o intuito de evitar a desmotivação por parte dos alunos ao não conseguir ultrapassar o nível com as duas "vidas" ou tentativas disponíveis, a consolidar os conteúdos lecionados e a permitir verificar o estado das aprendizagens destes.

Estas provas incidiram sobre os conceitos que estavam a ser lecionados no período de execução das mesmas.

3.1.5 ANÁLISE DA AMOSTRA

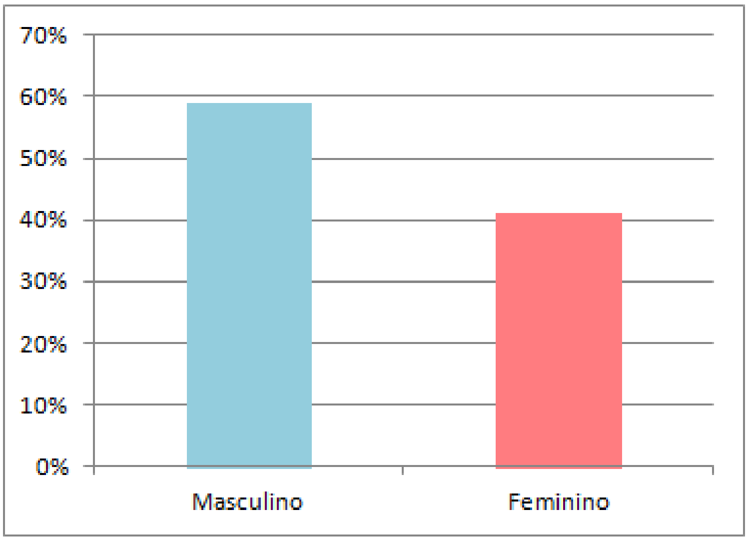


Figura 3.1: Caracterização da amostra por género

A amostra é maioritariamente do sexo masculino, com 59% dos participantes; o sexo feminino apresenta-se com 41%.

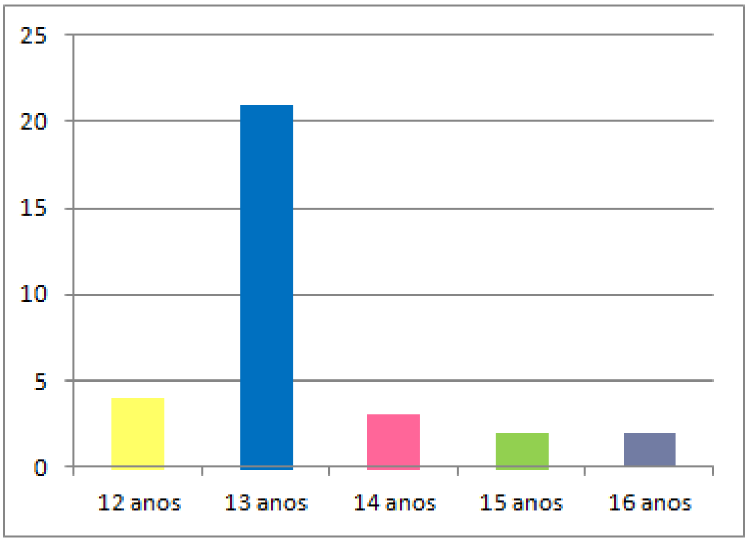


Figura 3.2: Caracterização da amostra por idade

A faixa etária mais representativa é a dos 13 anos (66%), seguida da dos 12 anos (13%), e dos 14 anos (9%). Com 15 e 16 anos temos uma minoria de 6% cada.

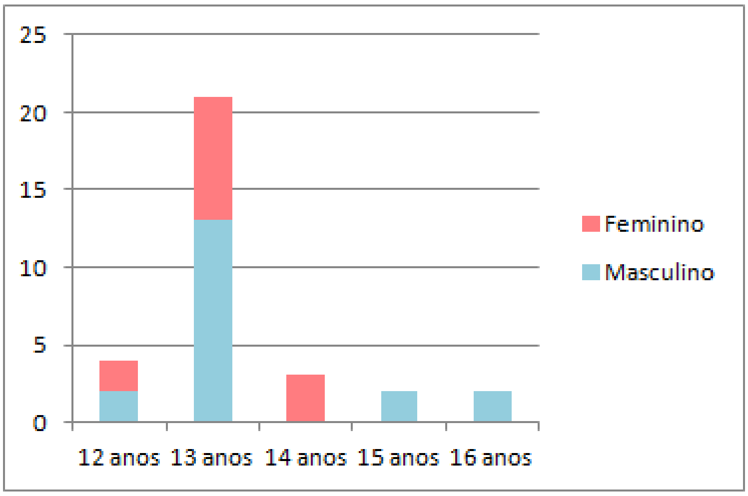


Figura 3.3: Caracterização da amostra por idade

3.1.6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O presente estudo baseia-se na análise de dados recolhidos sobre os resultados dos 32 alunos inscritos na plataforma.

A recolha de informação, para esta análise de dados, foi baseada nos dados fornecidos pela própria plataforma do PmatE, que se sintetiza na tabela seguinte, sendo as primeiras quatro provas aplicadas às turmas, como provas de ambientação à plataforma, e as restantes aos grupos definidos.

Prova	Turma/ Grupo	Domínio(s)	Total	Acertou	%	Errou	%	Não respondeu	%
Teorema de Pitágoras	8ºW 8ºZ	Geometria	368	243	66,03%	125	33,97%	0	0%
Potências de expoente inteiro	8ºW 8ºZ	Álgebra	740	566	76,49%	172	23,24%	2	0,27%
Operações com potências	8ºW 8ºZ	Números e operações	436	220	50,46%	205	47,02%	11	2,52%
		Álgebra	840	516	61,43%	307	36,55%	17	2,02%
Números e Operações	8ºW 8ºZ	Números e Operações	652	448	68,71%	204	31,29%	0	0%
Funções	ST1	Funções	120	60	50%	57	47,50%	3	2,5%
	ST2		160	92	57,50%	63	39,38%	5	3,13%
Monómios e polinómios	ST1	Álgebra	456	320	70,18%	124	27,19%	12	2,63%
	ST2		360	181	50,28%	158	43,89%	21	5,83%
Equações	ST1	Álgebra	128	67	52,34%	53	41,41%	8	6,25%
	ST2		48	20	41,67%	28	58,33%	0	0%
Sistemas	ST1	Álgebra	24	9	37,5%	12	50%	3	12,5%
	ST2		160	75	46,88%	72	45%	13	8,13%

Tabela 3.2: Resultados das diferentes provas criadas na plataforma PmatE

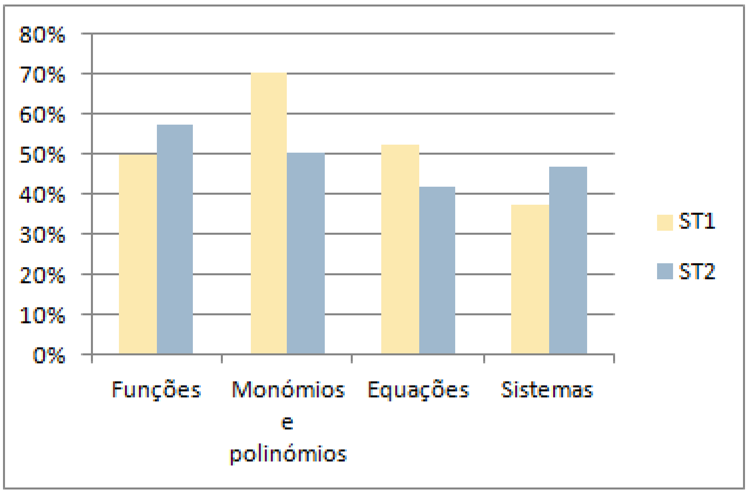


Figura 3.4: Comparação entre as percentagens de sucesso dos grupos criados

É possível aferir que as classificações médias obtidas pelo grupo ST1, nas diferentes provas criadas no PmatE, foram superiores às classificações médias do grupo ST2 nos domínios dos Monómios e Polinómios, bem como nas Equações, enquanto que nos domínios Funções e Sistemas o grupo ST2 obteve as classificações médias superiores às do grupo ST1.

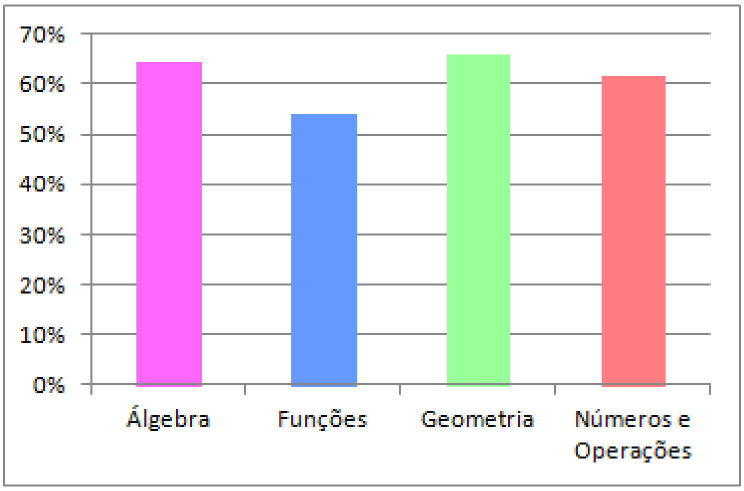


Figura 3.5: Comparação entre as percentagens de sucesso dos diferentes Domínios

Nas duas turmas salienta-se que 6% dos alunos (dois), com autorização de participação no projeto por parte dos Encarregados de Educação, não realizaram qualquer prova.

No decurso da execução do projeto foi criado para cada turma um ranking determinado mediante o número de provas realizadas na PEA e respetiva pontuação.

Semanalmente os alunos recebiam no seu email a tabela com a pontuação alcançada pelos participantes, com o reconhecimento simbólico de medalhas de ouro, prata e bronze aos três melhores classificados. De forma a estimular uma participação ativa, mensalmente foram atribuídas gratificações emblemáticas, em cada turma.

Assim, através dos rankings, pontos e medalhas, características comuns em jogos, aplicou-se a gamificação, fomentando a competição entre participantes e oferecendo uma exibição visual do progresso.

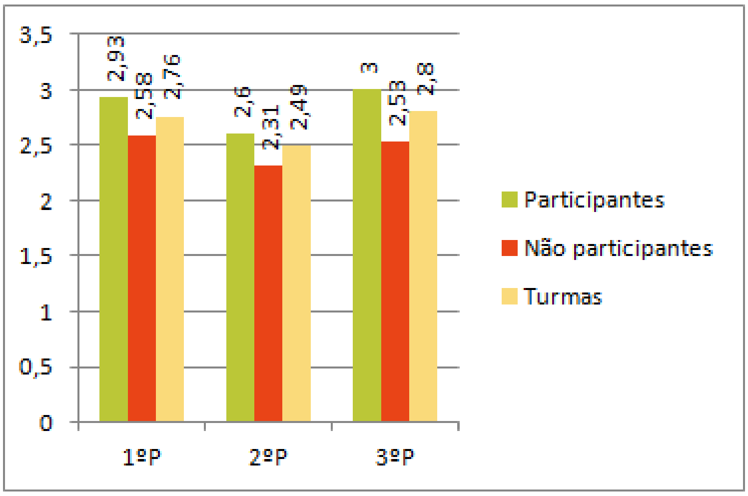


Figura 3.6: Comparação entre a avaliação dos participantes e não participantes por período

Através da análise do gráfico anterior pode-se constatar que a evolução das médias das classificações dos alunos que participaram no projeto foi superior à dos alunos não participantes, na medida em que os alunos participantes tiveram uma evolução positiva de 2,4%, entre o início e o término do ano letivo, enquanto que os alunos não participantes tiveram uma regressão significativa de 1,9%. É de referir que a média das turmas é bastante baixa, sendo inferior a três ao longo do ano letivo. Pode-se ainda verificar que o grupo de alunos participantes manteve sempre uma média superior à média das turmas.

3.1.7 AVALIAÇÃO DO PROJETO IMPLEMENTADO

A investigação decorreu durante um ano letivo, no mesmo estabelecimento de ensino, nas horas respeitantes ao período de lecionação da disciplina de matemática, bem como a partir de casa dos alunos.

O início da implementação do projeto esteve condicionado pela demora das autorizações dos encarregados de educação, para aferir os alunos participantes. Refiro ainda que os recursos informáticos disponíveis, em tempo letivo, não corresponderam às necessidades do projeto. Apesar da Plataforma de Ensino Assistido ser acessível aos alunos em qualquer lado, bastando ter um computador, telemóvel ou tablet, a fraca ou inexistente ligação à Internet, condicionou o desenvolvimento do mesmo. A maior parte dos alunos, se não todos, apesar de possuírem computador, telemóvel e/ou tablet em casa, não tinham ligação acessível à Internet.

Ao longo deste projeto constatou-se existir a necessidade de desenvolver mais recursos, na plataforma PmatE, para o subdomínio sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, que dessem resposta a todos os descritores dos dois objetivos gerais da Álgebra do 8º ano, definidos nas metas curriculares de matemática. Seria ainda interessante ter tido a oportunidade de criar provas para perfis de alunos distintos.

As turmas do 8º ano onde foi implementado este estudo tinham uma média de classificações baixa. No entanto, é importante referir que os alunos do 8º W que mais se destacaram na utilização da plataforma foram alunos com nível 4 ou 5, no final dos períodos. Na turma do 8º Z, apenas um dos alunos premiado com medalhas de ouro, prata ou bronze obteve nível positivo ao longo dos três períodos, sendo que outro aluno conseguiu atingir nível positivo no segundo e terceiro períodos.

Em forma de balanço, pode-se afirmar que dadas as limitações a esta investigação, tempo de execução do projeto com os escassos recursos disponíveis em sala de aula e fora dela, a média de classificações obtidas nas provas, a superação de algumas dificuldades dos alunos, o entusiasmo gerado à volta da publicação do ranking semanal e a evolução das classificações obtidas ao longo dos três períodos letivos, constituem indicadores positivos em relação à aplicação da gamificação, com recurso à plataforma PmatE, como estratégia de ensino-aprendizagem de sucesso para o grupo em estudo.

No entanto, é requerida uma análise cuidada dos dados ao longo do tempo, de modo a perceber como a PEA pode ser efetivamente aplicada e qual o seu impacto real na aprendizagem dos alunos.

CAPÍTULO 4

Recursos digitais desenvolvidos – Questões parametrizadas na matemática

4.1 Enquadramento no programa e metas curriculares do ensino básico

O subdomínio sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é parte integrante do domínio Álgebra (ALG), um dos quatro temas fundamentais do programa de matemática para o 3º ciclo do Ensino Básico.

O 3.º ciclo constitui uma importante etapa na formação matemática dos alunos, sendo simultaneamente um período de consolidação dos conhecimentos e capacidades a desenvolver durante o Ensino Básico de forma a respeitar duas indicações do programa: "a abstração desempenha um papel fundamental na atividade matemática (...) é fundamental que a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo assim o gosto por esta ciência ..."; "a aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente" [19].

Assim, o subdomínio sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas tem como propósito principal de ensino "desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar esses conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos"[19].

No Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 estão expressos os conteúdos temáticos relativos ao subdomínio sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas:

- Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; forma canónica; soluções; sistemas equivalentes;
- Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas;
- Resolução de sistemas de duas equações de 1.º grau pelo método de substituição.
- Problemas envolvendo sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.

No sentido de concretizar as indicações definidas no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, foram elaboradas, em 2013, Metas Curriculares de Matemática, onde se encontram elencados os objetivos gerais e respetivos descritores.

Para o subdomínio sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas foram definidos dois objetivos gerais, correspondentes ao 8º e 9º objetivos da Álgebra do 8º ano de escolaridade, especificados por descritores redigidos de forma concisa e que alvejam desempenhos precisos e avaliáveis:

8. Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas
    1. Designar por “sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas x e y” um sistema de duas equações numéricas redutíveis à forma “$ax + by = c$” tal que os coeficientes a e b não são ambos nulos e utilizar corretamente a expressão “sistema na forma canónica”.
    2. Designar, fixada uma ordem para as incógnitas, o par ordenado de números (x_0, y_0) como “solução de um sistema com duas incógnitas” quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por x_0 e a segunda por y_0 se obtêm duas igualdades verdadeiras e por “sistemas equivalentes” sistemas com o mesmo conjunto de soluções.
    3. Interpretar geometricamente os sistemas de duas equações de 1.º grau num plano munido de um referencial cartesiano e reconhecer que um tal sistema ou não possui soluções (“sistema impossível”), ou uma única solução (“sistema possível e determinado”) ou as soluções são as coordenadas dos pontos da reta definida por uma das duas equações equivalentes do sistema (“sistema possível e indeterminado”).
    4. Resolver problemas utilizando sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.
9. Resolver problemas
    1. Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau pelo método de substituição.” [15]

4.2 ENQUADRAMENTO TEÓRICO

A resolução de sistemas de equações lineares e a interpretação geométrica das suas soluções constituem dois dos principais conteúdos programáticos estudados em Álgebra.

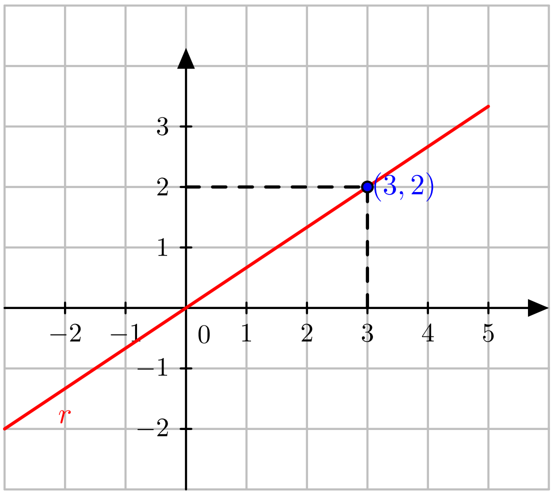
Com efeito, explicitam-se de seguida alguns conceitos que caracterizam a linguagem matemática que acompanha os sistemas de equações lineares e posteriormente concretizam-se os mesmos para o 3º ciclo do ensino básico, concretamente o 8º ano de escolaridade.

Definição 4.1 ***Equação linear*** *Dados os números reais* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b$*, com* $n \geq 1$*, a equação* $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ *onde* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *são variáveis ou incógnitas, é denominada de equação linear. Os números reais* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *são denominados coeficientes das variáveis* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$*, respetivamente, e* b *é denominado de termo independente.*

Equação do 1.º grau com duas incógnitas Uma equação do 1.º grau com duas incógnitas, é uma igualdade entre duas expressões que possa ser reduzida à forma $ax + by = c$, onde x e y são incógnitas, a, b são coeficientes e c o termo independente, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. As equações do 1.º grau com duas incógnitas tem uma infinidade de soluções. O conjunto-solução é, graficamente, representado por uma reta de declive $-\dfrac{a}{b}$ e ordenada na origem $\dfrac{c}{b}$.

Exemplo 4.1 *Considere-se a equação* $-2x + 3y = 0$*, ou seja, a equação (reduzida) da reta* $y = \dfrac{2}{3}x$*.*

Para traçar o gráfico correspondente basta marcar dois dos seus pontos, por exemplo $(0, 0)$ *e* $(3, 2)$*.*



x	y
0	0
3	2

Figura 4.1: Interpretação geométrica do exemplo 3.1

Definição 4.2 ***Solução de uma equação linear*** *Dada a equação linear* $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$*, chama-se solução da equação de* n *variáveis à sequência ou* n*-upla ordenada de números reais* $S = \{(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)\}$*, tal que* $a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + \ldots + a_ns_n = b$*,* *é uma identidade verdadeira. O conjunto S é chamado conjunto solução da equação ou raiz da equação.*

Solução de uma equação do 1º grau com duas incógnitas Solução de uma equação do 1º grau com duas incógnitas é um par ordenado de números reais que substituindo as respetivas incógnitas na equação a transformam numa igualdade numérica verdadeira. Graficamente, corresponde a um ponto que pertence à reta que representa o conjunto- solução da equação com duas incógnitas.

Exemplo 4.2 *O par ordenado $(-1, 2)$ é solução da equação $2x+y=0$ porque $2\times(-1)+2=0$.*

O par ordenado $(1, 2)$ não é solução da equação $2x+y=0$ porque $2\times 1+2\neq 0$, ou seja, este ponto não pertence à reta.

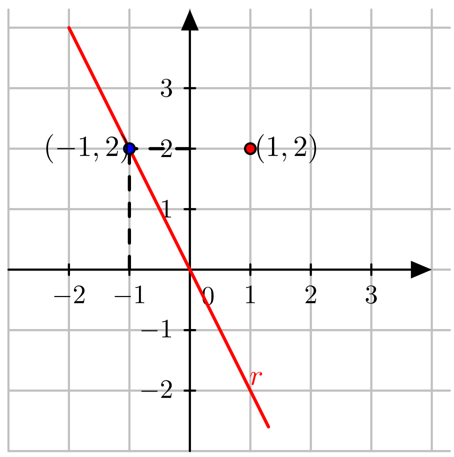


Figura 4.2: Interpretação geométrica do exemplo 3.2

Definição 4.3 ***Sistema de equações lineares*** *Ao conjunto de m equações lineares chama-se sistema linear de m equações e n variáveis, escrito usualmente na forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, 2, 3, \ldots, m$ e $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Todo o sistema de equações lineares pode ser representado na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou na sua forma ampliada:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ou simplesmente por $AX = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, X é a matriz das incógnitas, $X = [x_j] \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, B é a matriz dos termos independentes $B = [b_i] \in M_{1\times m}(\mathbb{R})$ e $[A|B] \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$ é a matriz aumentada (ou completa) do sistema.

Sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas Um sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas é a conjunção de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas.

O sistema diz-se na forma canónica quando está escrito na forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{4.2}$$

sendo x e y as incógnitas, $a_1,\ b_1,\ a_2$ e b_2 são os coeficientes c_1 e c_2 os termos independentes.

Exemplo 4.3 $3x - y = 1 \wedge x + y = 3$ *ou*

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Definição 4.4 ***Solução de um sistema de equações lineares*** *Uma solução do sistema é uma sequência ou n-upla de números* $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ *que satisfaça simultaneamente as* m *equações.*

Solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas O par ordenado de números reais (x_0, y_0) é solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas, quando ao substituir a primeira incógnita por x_0 e a segunda por y_0 se obtém duas igualdades numéricas verdadeiras.

Exemplo 4.4 *Considere-se o sistema de equações*

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

(1, 2) é simultaneamente solução das duas equações do sistema.
$3 \times 1 - 2 = 1$ *(proposição verdadeira)*
$1 + 2 = 3$ *(proposição verdadeira)*

Definição 4.5 ***Sistemas equivalentes*** *Dois sistemas dizem-se equivalentes quando têm o mesmo conjunto-solução.*

Exemplo 4.5

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x - 3y = 20 \end{cases}$$

São equivalentes pois ambos possuem o conjunto solução $S = \{(7, -2)\}$

Princípios de equivalência de equações

1. Se multiplicarmos ambos os membros de uma equação por um número não nulo, obtemos uma equação equivalente.

2. Se adicionarmos a ambos os membros de uma equação um mesmo número, obtemos uma equação equivalente.

Aplicando este princípios aos sistemas de equações lineares podemos deduzir o seguinte princípio:

Se multiplicarmos uma das equações por um número não nulo e a adicionarmos ordenadamente (termos semelhantes) a outra equação do sistema, obtemos um sistema equivalente.

No caso de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

são sistemas equivalentes.

Note-se que $a_1x + b_1y = c_1 \Leftrightarrow a_1x + b_1y + c_2 = c_1 + c_2 \Leftrightarrow a_1x + b_1y + (a_2x + b_2y) = c_1 + c_2 \Leftrightarrow (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2$

Claro que, se usarmos também o primeiro princípio de equivalência, obtemos sistemas equivalentes.

Seja $\alpha \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a_1x + \alpha b_1y = \alpha c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha a_1 + a_2)x + (\alpha b_1 + b_2)y = \alpha c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Exemplo 4.6 *Considere-se o sistema de equações*

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Aplicando o método da adição ordenada

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + x + y = 9 + 5 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 14 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases}$$

$S = \{(7, -2)\}$

Apesar de este método não ser lecionado no 3º ciclo, seria útil que o fosse, uma vez que ilustra bem os princípios de equivalência.

Teorema 4.1 ***Sistemas equivalentes***[1]

Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C|D]$ é obtida de $[A|B]$ aplicando-se uma ou várias operações elementares, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções, ou seja, são equivalentes.

Observação

Deste teorema seguem-se duas observações:

(a) Se X é solução de um sistema, então X também é solução do sistema obtido aplicando-se uma ou várias operações elementar sobre as suas equações.

(b) Se o sistema $CX = D$, é obtido de $AX = B$ aplicando-se uma ou várias operações elementares às suas equações (ou equivalentemente às linhas da sua matriz aumentada), então o sistema $AX = B$ também pode ser obtido de $CX = D$ aplicando-se uma ou várias operações elementares às suas equações, pois cada operação elementar possui uma operação elementar inversa do mesmo tipo, que desfaz o que a anterior fez.

Pela observação (b), $AX = B$ e $CX = D$ podem ser obtidos um do outro aplicando-se uma ou várias operações elementares sobre as suas equações. E pela observação (a), os dois possuem a mesma solução, ou seja são equivalentes.

Resolução algébrica de um sistema

Resolver um sistema de equações lineares significa determinar todas as suas soluções.

A regra de Cramer é um teorema da álgebra linear, que utiliza determinantes para a resolução de sistemas de equações lineares. Apesar de não ser um conteúdo do 3º ciclo, é importante para a construção dos recursos digitais desenvolvidos.

[1] A demonstração deste teorema pode ser consultada em [20]

A regra de Cramer é utilizada diretamente na resolução de sistemas em que o número de equações é igual ao número de incógnitas e quando o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, ou seja, quando se trata de um sistema possível e determinado.

Teorema 4.2 ***Regra de Cramer***[2]

Seja S um sistema linear de n equações lineares a n incógnitas, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, e A a sua matriz dos coeficientes. Se o determinante de A é diferente de zero, isto é $\triangle = |A| \neq 0$, então o sistema é possível e determinado e a solução é tal que:

$x_i = \frac{\triangle_i}{\triangle}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. onde $\triangle_i$ é $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \ldots, \triangle_n$, ou seja, os determinantes que se obtém de $\triangle$, substituindo a coluna i pela coluna dos termos independentes $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Observação

Se $AX = B$ é um sistema de n equações lineares a n incógnitas, na sua forma genérica:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.3}$$

Seja $\triangle$ o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$\triangle = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

A solução é dada por:

$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}, x_3 = \frac{\triangle_3}{\triangle}, \ldots, x_n = \frac{\triangle_n}{\triangle}$

Exemplo 4.7 *Considere-se um sistema de duas equações com duas incógnitas:*

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$$

Seja $\triangle$ o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

[2] A demonstração deste teorema pode ser consultada em [20]

$\triangle_1$ e $\triangle_2$ os determinantes obtidos pela substituição das colunas de $\triangle$ pelos termos independentes.

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 33$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

A solução do sistema é:
$x = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{33}{11} = 3$

$y = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{-11}{11} = -1$

$S = \{(3, -1)\}$

Método de substituição

No 3º ciclo do Ensino Básico, utiliza-se o método da substituição, para determinar a solução de um sistema de duas equações do 1º grau em duas incógnitas.

Princípio de substituição de sistemas de equações lineares

Se num dado sistema de duas equações do 1º grau em duas incógnitas resolvermos uma equação com respeito a uma das incógnitas e substituirmos na outra equação essa incógnita pela expressão obtida obtém-se um sistema equivalente ao inicial.

Assim o método de substituição é um método algébrico que permite resolver qualquer sistema e consiste em:

1. Resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas;
2. Substituir a expressão encontrada na outra equação;
3. Resolver a equação obtida que apenas contém uma incógnita;
4. Substituir o valor da incógnita na primeira equação e resolvê-la.

Exemplo 4.8

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases}$$

Na 1.ª equação, o coeficiente de y é 1, logo ao resolver esta em ordem a y não vão aparecer denominadores.

$$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 5(6 - 2x) = 22 \end{cases}$$

Na 2.ª equação, substituiu-se o y pela expressão $6 - 2x$.

$$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 2x + 30 - 10x = 22 \end{cases}$$

A 2.ª equação só tem uma incógnita. Resolve-se esta equação em ordem a x.

$$\begin{cases} y = 6 - 2x \\ -8x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2 \times 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Substitui-se o valor de x *na 1.ª equação para determinar* y.

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

A solução do sistema é $(x, y) = (1, 4)$.

Discussão de sistemas lineares

Apesar de este estudo não estar adequado ao 3º ciclo do Ensino Básico referimo-lo aqui já que nos permite construir sistemas dos vários tipos (Possível e determinado (SPD),Possível e indeterminado (SPI) e Impossível (SI)).

Definição 4.6 ***Classificação de sistema lineares*** *Um sistema de equações lineares diz-se:*

1. *Possível e determinado (SPD) se tiver uma única solução;*

2. *Possível e indeterminado (SPI) se tiver uma infinidade de soluções;*

3. *Impossível (SI) se não tiver soluções.*

Discutir um sistema linear (S) significa realizar um estudo de forma a classificá-lo.

A análise e classificação de um sistema de equações lineares pode ser feita em função do número de equações existente no sistema, m, do número de incógnitas, n, e do valor da característica da matriz A.

Definição 4.7 ***Característica da matriz*** *Chama-se característica da matriz A ao número máximo de filas paralelas (linhas ou colunas) linearmente independentes que figuram nessa matriz. Representa-se por* $r(A)$ *ou* $car(A)$ *ou* $c(A)$.

A característica de matrizes é muito útil na resolução de alguns problemas, nomeadamente na classificação de sistemas de equações lineares.

Trata-se de relacionar a característica da matriz dos coeficientes (ou matriz simples) do sistema e a característica da matriz ampliada do sistema.

Teorema 4.3 ***Teorema de Rouché***[3]

Para que um sistema de equações lineares seja possível é necessário e suficiente que a característica da sua matriz simples seja igual à característica da sua matriz ampliada.

Observação

Se as características forem diferentes, então o sistema é impossível.

Este teorema permite elaborar o seguinte **Diagrama de classificação:**

Considere-se um sistema $AX = B$ de m equações e n incógnitas.

$A \to$ matriz simples (ou matriz dos coeficientes) do sistema

$[A|B] \to$ matriz ampliada (ou matriz aumentada ou completa) do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} c(A) \neq c([A|B]) \to \textit{Sistema Impossível} \\ c(A) = c([A|B]) \to \textit{Sistema Possível} \end{array}\right\} \textit{pelo teorema de Rouché} \\ \qquad\qquad c(A) = \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas} \to \textit{Sistema Possível e Determinado} \\ \qquad\qquad c(A) < \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas} \to \textit{Sistema Possível e Indeterminado} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow \underbrace{\underline{\textit{grau de indeterminação}}}_{\substack{\text{Corresponde ao} \\ \text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas livres,} \\ \text{isto é, a poder tomar} \\ \text{qualquer valor (em } \mathbb{R})}} = \textit{nž de incógnitas} - c(A) \end{array}\right.$$

Observações:

O número de incógnitas de um sistema $AX = B$ é igual ao número de colunas da matriz A (portanto, no que respeita à matriz ampliada $[A|B]$, excetua-se a coluna B dos termos independentes, ou seja a última coluna desta matriz).

Para qualquer sistema $AX = B$, tem-se $c(A) \leq c([A|B])$. De facto, é impossível acontecer que $c(A) > c([A|B])$, pois o número de linhas de A é igual ao número de linhas $[A|B]$ e cada linha não nula de A é também uma linha não nula de $[A|B]$.

A diferença poderá estar apenas em alguma linha que seja nula para A e que seja não nula para $[A|B]$.

Regra de Cramer

Se um sistema linear tem n equações e n incógnitas, ele pode ser possível e determinado (SPD), se $\triangle = |A| \neq 0$, caso em que a solução é única.

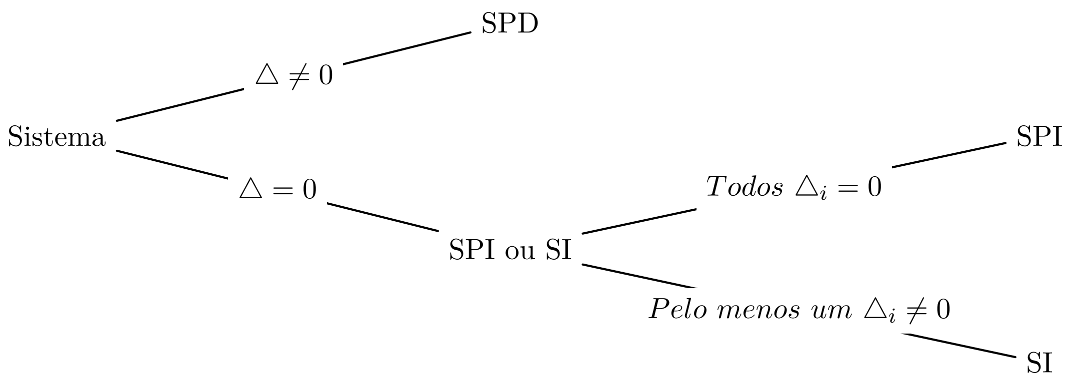
Se $\triangle = |A| = 0$, o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

Para saber se o sistema é possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI) tem-se de analisar os determinantes que se obtém de $\triangle$, substituindo a coluna i pela coluna dos termos independentes $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Se $\triangle = |A| = 0$ e $\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = \ldots = \triangle_n = 0$, o sistema é possível e indeterminado (SPI), tem uma infinidade de soluções.

Se $\triangle = |A| = 0$ e pelo menos um $\triangle_i \neq 0$, o sistema é impossível (SI), não admite solução.

[3] A demonstração deste teorema pode ser consultada em [20]



Exemplo 4.9 *Discutir o sistema*

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \triangle = -3 - m$$

$$\begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \triangle_1 = -2 - m$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \triangle_2 = 1$$

Fazendo:
$\triangle = 0 \Rightarrow -3 - m = 0 \Rightarrow m = -3$
$\triangle_1 = 0 \Rightarrow -2 - m = 0 \Rightarrow m = -2$

Assim, se $m \neq -3$, *o sistema é possível e determinado. Se* $m = -3$, $\triangle_1 \neq 1$ *o sistema é impossível.*

Interpretação geométrica de um sistema

Num referencial cartesiano as equações do tipo $ax+by = c$, com a e b não simultaneamente nulos, representam retas. Assim, resolver graficamente um sistema de duas equações com duas incógnitas equivale a encontrar as posições relativas das retas que representam essas equações.

1. O gráfico das equações lineares são retas que se intersetam em um único ponto, isto é, são retas concorrente. Assim, o sistema linear possui somente uma única solução – Sistema possível e determinado (SPD).

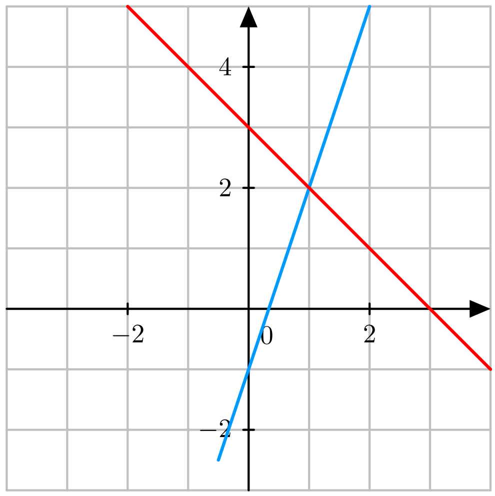


Figura 4.3: Representação geométrica de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas possível e determinado

2. O gráfico das equações lineares são retas paralelas distintas. Assim, o sistema linear não possui solução – Sistema impossível (SI).

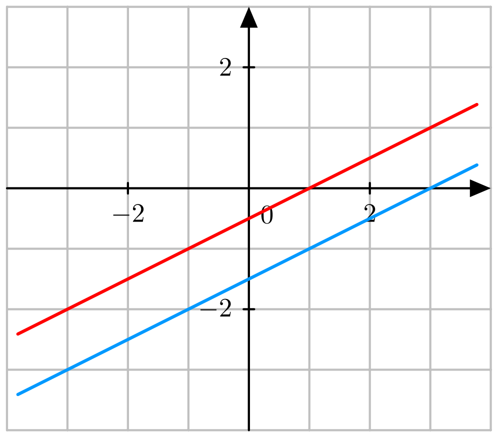


Figura 4.4: Representação geométrica de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas impossível

3. O gráfico das equações lineares são retas paralelas coincidentes. Assim, o sistema linear possui um número infinito de soluções – Sistema possível e indeterminado (SPI).

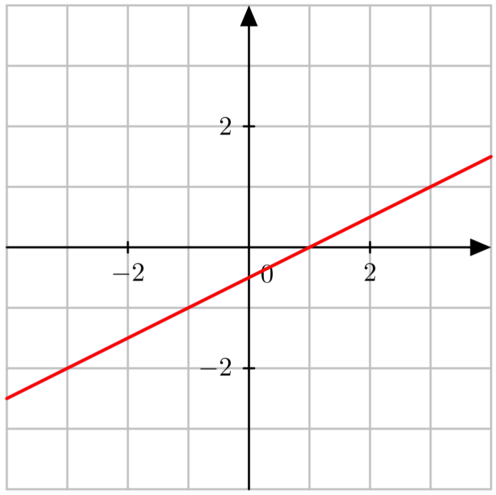


Figura 4.5: Representação geométrica de um sistema linear de duas equações a duas incógnitas possível e indeterminado

Exemplo 4.10 *Sistema possível e determinado (SPD)*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7-3x}{2} \\ y = 1 + x \end{cases} \tag{4.4}$$

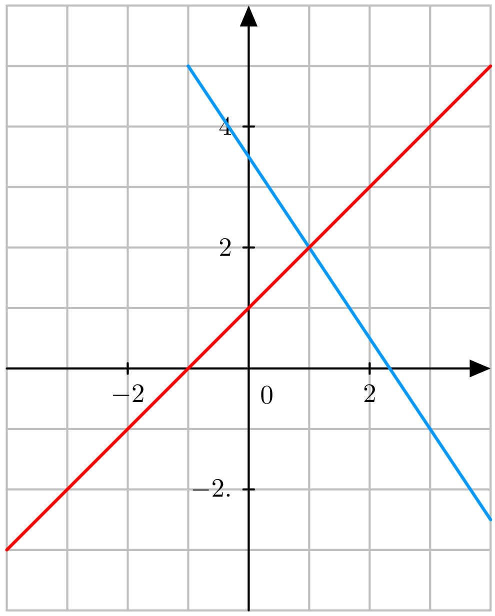


Figura 4.6: Representação geométrica do sistema (4.4)

Sistema impossível (SI)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7-3x}{2} \\ y = \frac{4-3x}{2} \end{cases} \tag{4.5}$$

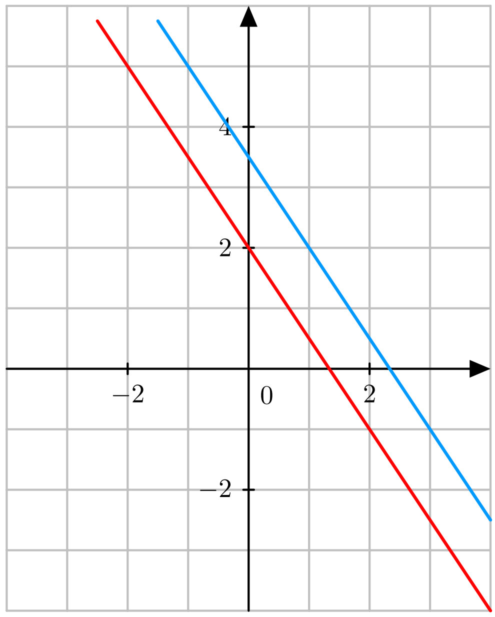


Figura 4.7: Representação geométrica do sistema (4.5)

Sistema possível e indeterminado (SPI)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7-3x}{2} \\ y = \frac{14-6x}{4} \end{cases} \tag{4.6}$$

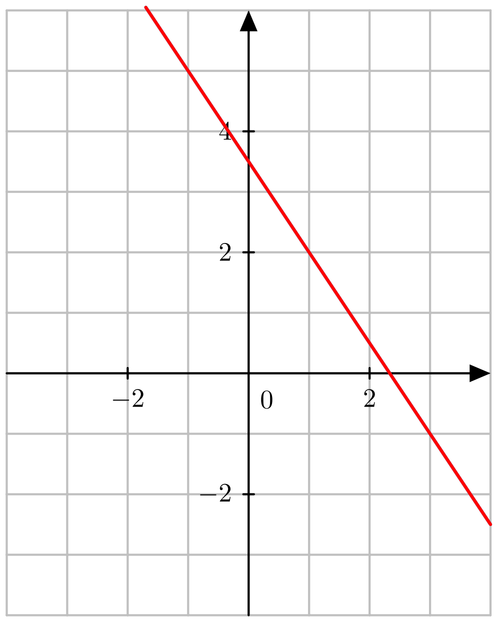


Figura 4.8: Representação geométrica do sistema (4.6)

Resolução de problemas utilizando sistemas de equações lineares

A resolução de problemas tem um papel fundamental na aplicação dos sistemas de equações.

Na resolução de problemas deve ter-se em atenção o seguinte:

1. Ler e interpretar o enunciado de modo a identificar as incógnitas.
2. A partir da informação dada estabelecer relações e exprimi-las através de um sistema de equações.
3. Resolver o sistema.
4. Analisar as soluções do sistema no contexto apresentado.

Nem todos os problemas que podem ser traduzidos por um sistema de equações do 1.º grau a duas incógnitas têm solução. Quando não apresentam solução denominam-se problemas impossíveis e quando apresentam um número infinito de soluções denominam-se problemas indeterminados.

Um problema representado por um sistema possível e determinado diz-se possível se as coordenadas do ponto do conjunto-solução fizerem sentido no contexto do problema.

Exemplo 4.11 *Considere o seguinte problema:*

A diferença entre a idade de dois irmãos é de 10 anos e a soma é 34 anos. Qual a idade de cada um dos irmãos?

Seja y a idade do irmão mais velho e x a idade do irmão mais novo.

Atendendo aos dados do problema somos conduzidos às equações: $y - x = 10$ *e* $y + x = 34$

Como as duas equações têm de ser verificadas simultaneamente, consideramos o sistema de equações:

$$\begin{cases} y - x = 10 \\ y + x = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 10 \\ x + 10 + x = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 10 \\ 2x = 34 - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 + 10 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 22 \\ x = 12 \end{cases}$$

Esta solução faz sentido no contexto do problema. Assim, o irmão mais velho tem 22 anos e o mais novo 12.

Exemplo 4.12 *Considere agora o seguinte problema:*

A Beatriz tem numa carteira 14 moedas, umas de 10 cêntimos e outras de 50 cêntimos, num total de 4€. Quantas moedas de cada tipo tem a Beatriz?

Seja x o número de moedas de 10 cêntimos e y o número de moedas de 50 cêntimos.

Atendendo aos dados do problema somos conduzidos às equações: $0,1x + 0,5y = 4$ *e* $x + y = 14$

Como as duas equações têm de ser verificadas simultaneamente, consideramos o sistema de equações:

$$\begin{cases} 0,1x + 0,5y = 4 \\ x + y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1(14 - y) + 0,5y = 4 \\ x = 14 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,4 - 0,1y + 0,5y = 4 \\ x = 14 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,4y = 4 - 1,4 \\ x = 14 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2,6}{0,4} \\ x = 14 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6,5 \\ x = 14 - 6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6,5 \\ x = 7,5 \end{cases}$$

Apesar de o sistema ter solução (sistema possível e determinado), esta não faz sentido no contexto do problema porque os valores das incógnitas têm de ser números inteiros positivos.

Observação: *Caso se mantivesse o mesmo enunciado, alterando apenas o valor das moedas de 10 cêntimos para 20 cêntimos, a solução do sistema já teria sentido no contexto do problema.*

4.3 AS DIFICULDADES MAIS FREQUENTES RELATIVAS AOS SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1.º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Apesar da Álgebra constituir um dos domínios mais importantes no ensino da Matemática, é também onde grande parte dos alunos revela mais dificuldades.

Nos sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, essas dificuldades remetem para a tradução de situações dadas em linguagem natural para a linguagem algébrica (equações). Tal advém da falta de compreensão dos enunciados e também do estabelecimento incorreto de relações entre as duas linguagens.

Por outro lado, as dificuldades mais comuns dos alunos na resolução de sistemas de equações surgem de erros relativos à resolução de equações do 1º grau a duas incógnitas, já lecionadas anteriormente.

Outra das dificuldades detetadas é a interpretação da solução do sistema, de acordo com as condições dadas.

Na resolução de problemas utilizando sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas, os alunos têm ainda dificuldades em analisar se a solução do sistema é também solução do problema, ou seja, se esta faz algum sentido no contexto do problema apresentado.

Os recursos tecnológicos que podem ser utilizadas no ensino e na aprendizagem da Álgebra permitem explorar e clarificar a resolução de problemas, representando, por isso, grande valor para a aprendizagem da Álgebra.

Neste sentido foram desenvolvidos recursos digitais que permitissem aos alunos consolidar o conhecimento sobre o subdomínio sistema de duas equações de 1.º grau com duas incógnitas e superar as dificuldades descritas anteriormente.

4.4 RECURSOS DIGITAIS DESENVOLVIDOS

Com o objetivo de fornecer aos alunos do 8º ano de escolaridade recursos sobre o subdomínio sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, foram definidos exercícios que permitissem consolidar o conhecimento de todos os conteúdos temáticos.

Foram criados quatro Modelos Geradores de Questões (MGQ) na Plataforma de Ensino Assistido (PEA) do PmatE, tendo sido definidos os parâmetros e os respetivos intervalos possíveis de valores, de forma a permitir assim automaticamente uma panóplia de enunciados.

Os detalhes técnicos para a elaboração destes modelos podem ser consultados no artigo “Modelmaker, a multidisciplinary web application to build question generator models from basic to higher education”. [21]

Para criar um exercício parametrizado deve-se catalogar o modelo, quanto à área científica, área (domínio), tema (subdomínio), ciclo de ensino, nível de dificuldade e tipo de modelo:

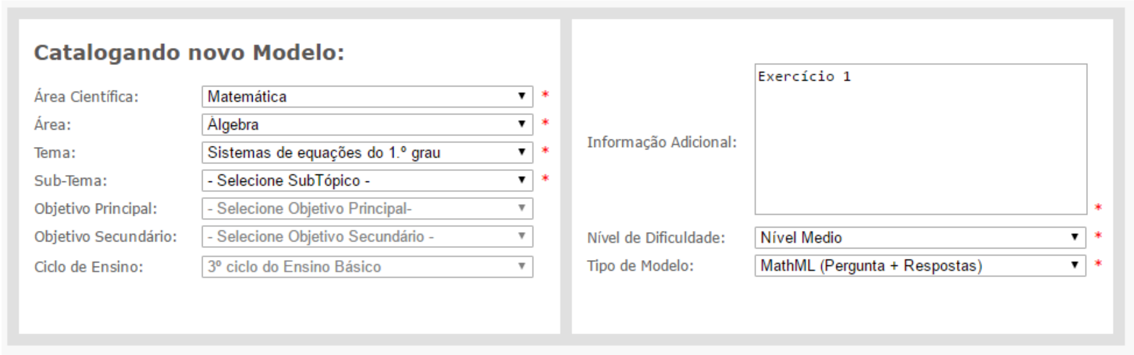


Figura 4.9: Catalogação do MGQ

4.4.1 MODELO GERADOR DE QUESTÕES 1

Neste exercício pretende-se que os alunos reconheçam o sistema na forma canónica, determinem o par ordenado de números $(x_0; y_0)$ que corresponde à solução do sistema, identifiquem a posição relativa de duas retas no plano e sejam capazes de classificar o sistema como «sistema impossível», «sistema possível e determinado» ou «sistema possível e indeterminado».

Após catalogar o modelo, foi inserido o respetivo enunciado:

$$\text{Considera o sistema de equações} \quad \begin{cases} x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} \\ a_2(x-1) + b_2 y = c_2 - a_2 \end{cases}$$

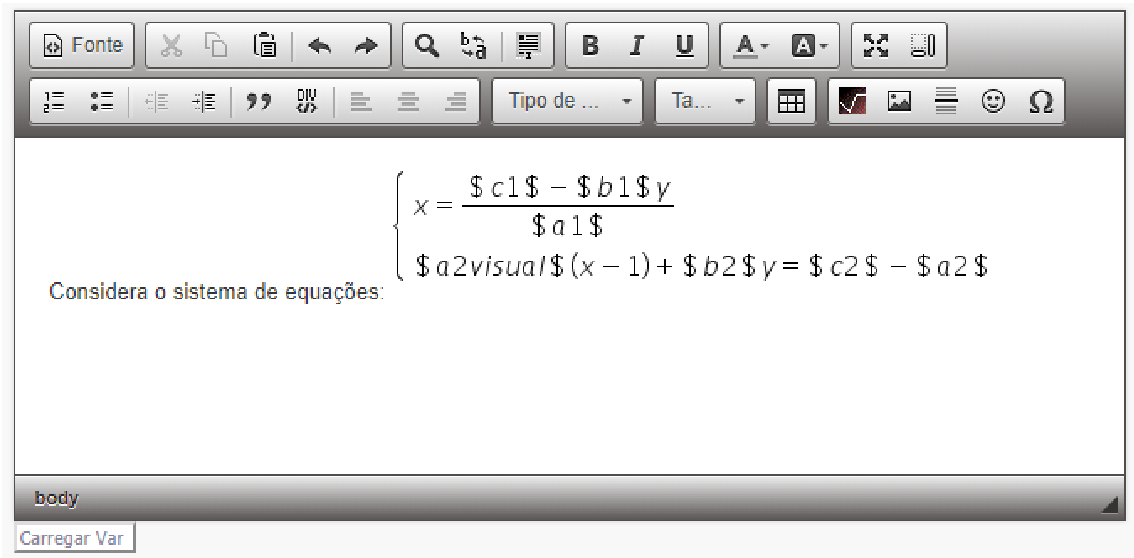


Figura 4.10: Enunciado do MGQ 1

Neste caso são definidos os parâmetros a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2, que na sintaxe do Modelmaker deverão ser inseridos entre o símbolo "\$". Os valores escolhidos são:

- a_1, b_1, c_1, b_2 - números inteiros entre 2 e 5;
- a_2 - números inteiros entre 1 e 3;
- c_2 - números inteiros entre 4 e 6.

Os intervalos são definidos de forma a criar, de forma aleatória, uma variedade de enunciados para cada questão gerada, sem no entanto envolver cálculos demasiado complexos uma vez que não é esse o propósito do exercício.

Foi ainda adicionada uma variável condicional, $a_2visual$, de forma a que quando a variável a_2 assuma o valor 1, este não seja apresentado no enunciado.

Seguidamente enunciam-se quatro afirmações, de verdadeiro ou falso, igualmente parametrizadas:

Afirmação 1:

Na elaboração desta afirmação, utiliza-se o conceito de caixa. Estas caixas podem ser vistas como linhas dinâmicas de tabelas, onde cada linha pode conter várias subcaixas. No momento da concretização, apenas uma linha por tabela é escolhida, o que permite uma aleatoriedade na resposta.

É de salientar que a inclusão de caixas no Modelmaker altera, visualmente, a ordem dos elementos inseridos, quando estamos a construir o enunciado. No entanto, estes elementos surgem na ordem correta aquando da concretização do exercício.

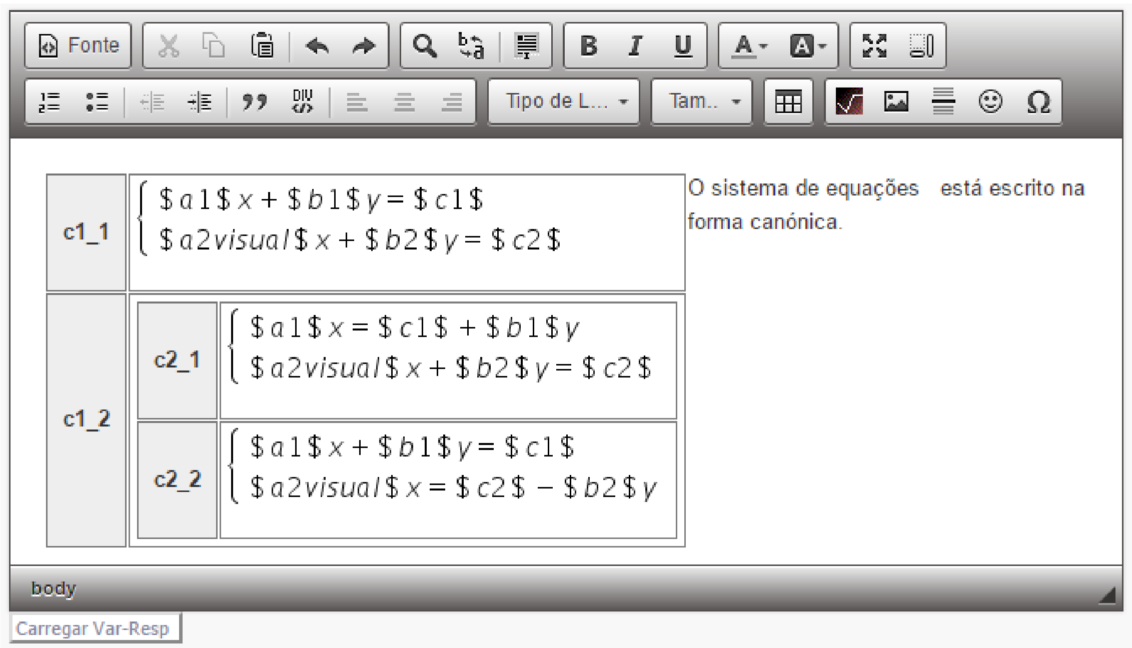


Figura 4.11: Afirmação 1

De forma a garantir a veracidade da afirmação, procede-se à validação da mesma, definindo que esta é verdadeira sempre que a célula selecionada aleatoriamente seja a $c1\_1$:

Figura 4.12: Validação da afirmação 1

Afirmação 2:

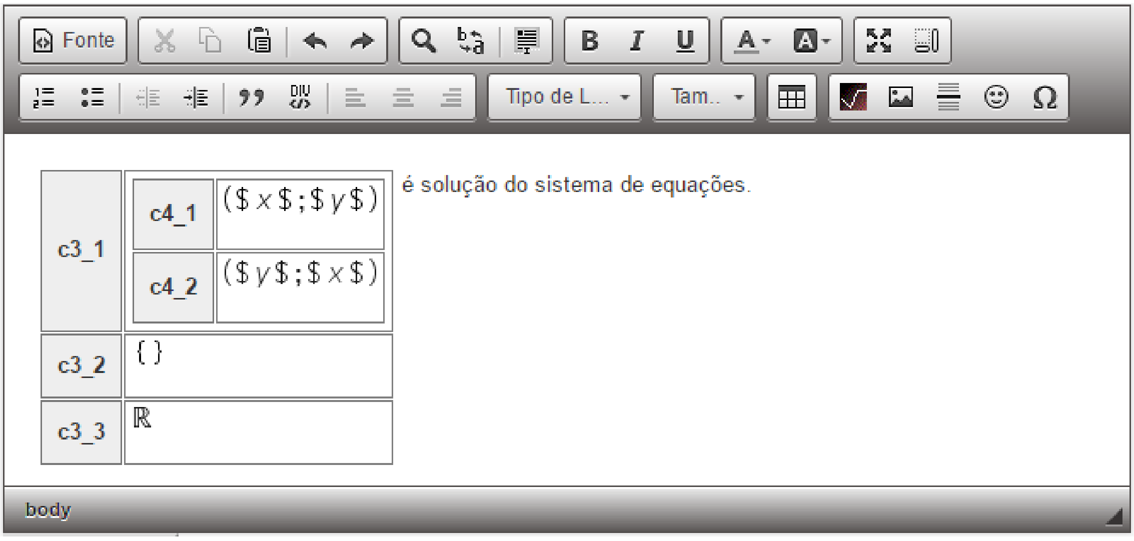


Figura 4.13: Afirmação 2

Para a validação da afirmação 2 são definidas as variáveis auxiliares a, que corresponde ao resultado da expressão $\frac{a1}{a2}$; b, que corresponde ao resultado da expressão $\frac{b1}{b2}$; c, que corresponde ao resultado da expressão $\frac{c1}{c2}$; e d, que corresponde ao resultado da expressão $a1b2 - a2b1$;

Procede-se então à validação da afirmação, com as seguintes condições:

- Seja apresentada a célula $c4\_1$ e a variável auxiliar d seja diferente de 0;
- Seja apresentada a célula $c3\_2$, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja diferente da variável auxiliar c;
- Seja apresentada a célula $c3\_3$, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar c;

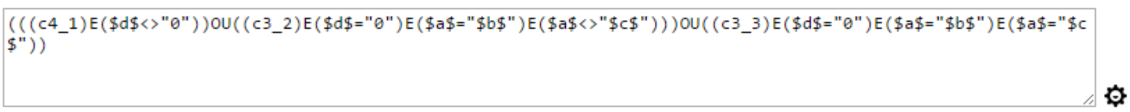


Figura 4.14: Validação da afirmação 2

Afirmação 3:

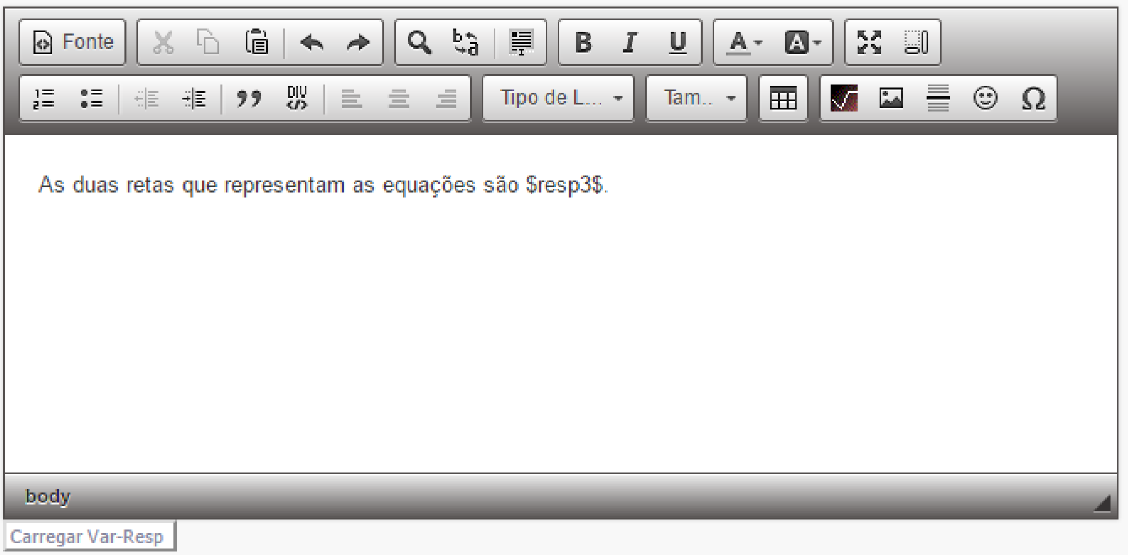


Figura 4.15: Afirmação 3

Para a validação da afirmação 3 foi adicionada a variável $resp3$. Esta pode assumir uma das seguintes frases: “estritamente paralelas”, “concorrentes” ou “coincidentes”.

A validação da afirmação 3 é feita com as seguintes condições:

- Seja apresentada a frase “estritamente paralelas”, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja diferente da variável auxiliar c;
- Seja apresentada a frase “concorrentes” e a variável auxiliar d seja diferente de 0;
- Seja apresentada a frase “coincidentes”, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar c;

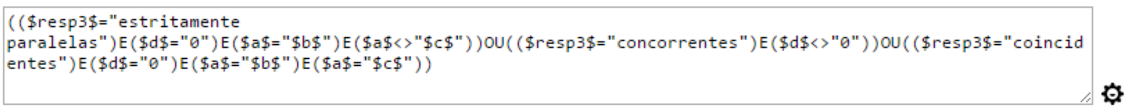


Figura 4.16: Validação da afirmação 3

Afirmação 4:

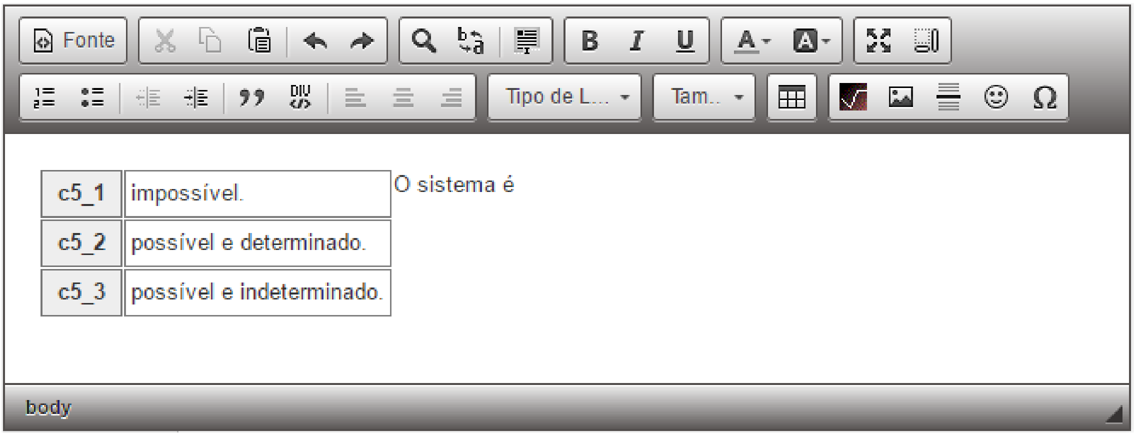
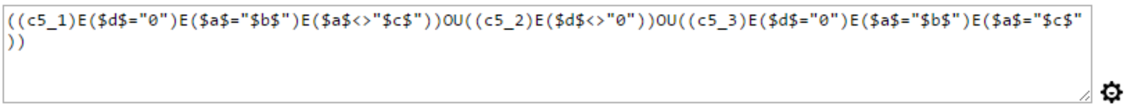


Figura 4.17: Afirmação 4

A validação da afirmação 4 é feita com as seguintes condições:

- Seja apresentada a célula $c5\_1$, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja diferente da variável auxiliar c;
- Seja apresentada a célula $c5\_2$ e a variável auxiliar d seja diferente de 0;
- Seja apresentada a célula $c5\_3$, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar c;



```
((c5_1)E($d$="0")E($a$="$b$")E($a$<>"$c$"))OU((c5_2)E($d$<>"0"))OU((c5_3)E($d$="0")E($a$="$b$")E($a$="$c$"
))
```

Figura 4.18: Validação da afirmação 4

Para o Modelo Gerador de Questões 1 foram então definidas as seguintes variáveis:

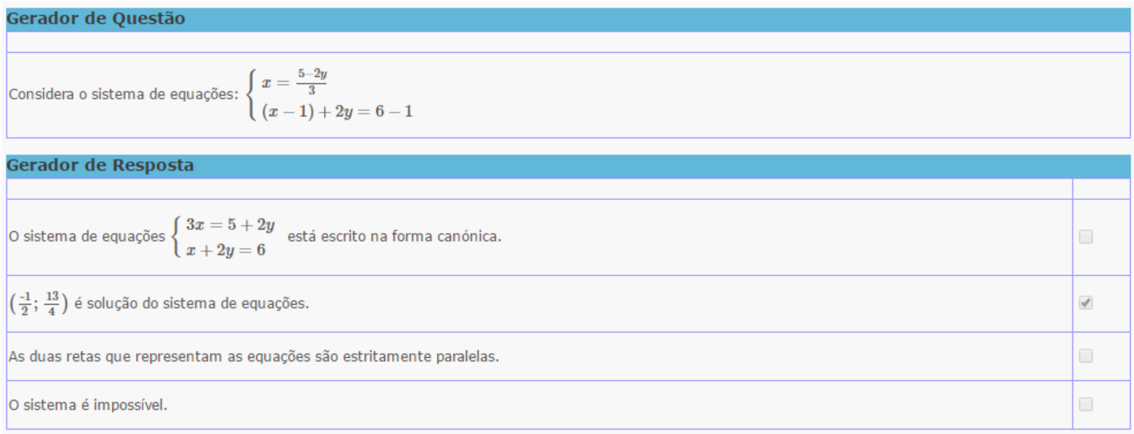
Descrição variáveis

Nome	Tipo	Subtipo	Valor	Valor Limite	Casas Decimais
$c1$	Inteiro	intervalo/lista	2	5	null
$b1$	Inteiro	intervalo/lista	2	5	null
$a1$	Inteiro	intervalo/lista	2	5	null
$a2$	Inteiro	intervalo/lista	1	3	null
$b2$	Inteiro	intervalo/lista	2	5	null
$c2$	Inteiro	intervalo/lista	4	6	null
d	Função Matemática	Fórmula	$a1$*$b2$-$a2$*$b1$	null	
a	Função Matemática	Fórmula	$a1$/$a2$	null	
b	Função Matemática	Fórmula	$b1$/$b2$	null	
c	Função Matemática	Fórmula	$c1$/$c2$	null	
$x1$	Função Matemática	Fórmula	$b2$*$c1$-$b1$*$c2$	null	
z	Função Matemática	Fórmula	$a1$*$b2$-$a2$*$b1$	null	
$x2$	Função Matemática	Fórmula	$a1$*$c2$-$a2$*$c1$	null	
x	Cálculo com Python	Código	def output(): return mathml(sp.Rational($x1$,z))	null	null
y	Cálculo com Python	Código	def output(): return mathml(sp.Rational($x2$,z))	null	null
$a2visual$	Função Dependência	Condições	2	null	null
$resp3$	Texto	igual/lista de valores	{estritamente paralelas\concorrentes\coincidentes}	null	null

Figura 4.19: Variáveis definidas do MGQ 1

Para finalizar concretiza-se o exercício parametrizado, sendo então apresentadas instâncias do exercício:

Concretização 1:



Gerador de Questão

Considera o sistema de equações: $\begin{cases} x = \frac{5-2y}{3} \\ (x-1)+2y = 6-1 \end{cases}$

Gerador de Resposta

O sistema de equações $\begin{cases} 3x = 5+2y \\ x+2y = 6 \end{cases}$ está escrito na forma canónica.

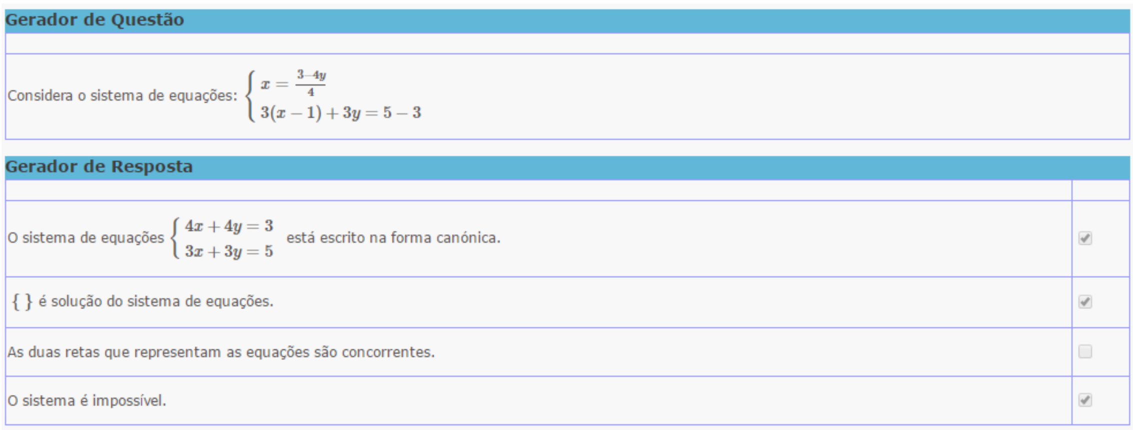
$\left(\frac{-1}{2}; \frac{13}{4}\right)$ é solução do sistema de equações.

As duas retas que representam as equações são estritamente paralelas.

O sistema é impossível.

Figura 4.20: Concretização 1

Concretização 2:



Gerador de Questão

Considera o sistema de equações: $\begin{cases} x = \frac{3-4y}{4} \\ 3(x-1)+3y = 5-3 \end{cases}$

Gerador de Resposta

O sistema de equações $\begin{cases} 4x+4y = 3 \\ 3x+3y = 5 \end{cases}$ está escrito na forma canónica.

{ } é solução do sistema de equações.

As duas retas que representam as equações são concorrentes.

O sistema é impossível.

Figura 4.21: Concretização 2

Encontram-se em anexo os restantes recursos digitais construídos.

Os recursos criados já estão disponibilizados na plataforma do PmatE, podendo ser usados em provas, nomeadamente nas provas de treino das Competições Nacionais de Ciência.

CAPÍTULO 5

Conclusão e trabalho futuro

Sendo a Álgebra uma área tão rica e importante da Matemática, é nela que continuam a residir algumas das maiores dificuldades dos alunos aquando da sua aprendizagem.

A gamificação, com a utilização de elementos dos jogos, cria uma dinâmica diferente na sala de aula, sendo uma estratégia útil para fomentar o empenho dos alunos na superação dessas dificuldades e, ao mesmo tempo, estimular os melhores alunos para serem ambiciosos. Embora não seja possível generalizar esta ambição para todos os alunos, o processo de gamificação revela-se uma solução integradora, proporcionando aos alunos uma experiência de aprendizagem mais motivante comparativamente aos conteúdos temáticos que não foram gamificados.

Tendo presente este facto, ao longo do ano letivo 2016/2017 foi utilizada a Plataforma de Ensino Assistido (PEA) da Universidade de Aveiro, dentro e fora da sala de aula, como ferramenta para a promoção do sucesso escolar, nomeadamente no domínio da Álgebra.

Foi possível constatar que a PEA do PmatE é uma ferramenta útil e prática, de fácil manipulação, que ajuda a motivar os alunos e a identificar os conteúdos em que estes sentem maiores dificuldades. Aos docentes permite a criação de provas de diagnóstico e de treino, de uma forma célere, permitindo identificar, rapidamente, os pontos fortes e fracos de cada aluno. Esta ferramenta permite ainda a partilha de recursos entre docentes, que podem criar os seus próprios conteúdos e disponibilizá-los à comunidade educativa, através da plataforma de e-learning. Assim, os alunos têm acesso a uma panóplia de exercícios, disponibilizados de uma forma mais motivadora e desafiante.

Acresce ainda que a PEA é acessível em qualquer lado, bastando ter um computador, telemóvel ou tablet com ligação à Internet, podendo ser utilizada dentro e fora da sala de aula, permitindo ao aluno, autonomamente, aprender ao seu próprio ritmo.

Contudo, ao longo deste projeto as limitações prenderam-se, essencialmente, com o tipo de questões que é possível criar com o Modelo Gerador de Questões (MGQ) e nos constrangimentos dos recursos materiais: falta de salas disponíveis com computadores ligados à Internet, escassos recursos tecnológicos ao alcance dos alunos e o condicionado acesso à Internet em contexto de sala de aula e fora dela.

Deve-se referir que apesar do MGQ ser uma ferramenta deveras atrativa e de fácil manuseio para os alunos, apenas permite criar questões do tipo Verdadeiro/Falso que possibilitam a aplicação e compreensão de conhecimentos, não admitindo desse modo a criação de questões que envolvam a resolução de problemas, não testando assim uma parte das competências a desenvolver pelos alunos.

Estando este projeto acessível unicamente na Internet, os constrangimentos dos recursos materiais são de importância fulcral para uma utilização produtiva do PmatE. Outro constrangimento é que apesar de os alunos continuarem a sentir atração pela tecnologia, sentem por vezes dificuldade na sua utilização com objetivos de aprendizagem.

Apesar das limitações referidas terem condicionado o desenvolvimento do projeto, a PEA revela-se um eficaz instrumento de apoio aos vários intervenientes educativos.

Foram elaborados quatro MGQ na PEA do PmatE sobre o subdomínio sistema de duas equações de 1.º grau com duas incógnitas.

Como ponto de partida para a construção dos exercícios digitais de apoio a este subdomínio procedeu-se à formulação do enquadramento teórico que permitiu a adequação científica necessária à construção dos referidos exercícios.

Para a elaboração dos MGQ, foram consideradas as dificuldades dos alunos na resolução de exercícios inerentes ao subdomínio sistema de duas equações de 1.º grau com duas incógnitas e os objetivos definidos para os conteúdos temáticos determinados no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007.

A elaboração dos exercícios foi inicialmente complexa, dado o total desconhecimento da plataforma web que permite a criação de MGQ, Modelmaker, e da linguagem Python que foi necessária na programação dos mesmos. A estreita e contínua colaboração com a equipa do PmatE, em particular no que concerne à construção dos MGQ, foi preponderante para o sucesso desta etapa do projeto.

Foi a primeira vez que desenvolvi uma investigação com esta intensidade e duração e a elaboração deste trabalho requereu ainda mais dedicação e esforço, pela minha parte, na medida em que teve de ser feita uma aprendizagem do sistema tipográfico Latex, bem como ter sido realizado em paralelo com a preparação e ensino letivo de aulas no Agrupamento de Escolas onde me encontrava a lecionar.

Para além destas ferramentas, foi utilizada a aplicação Geogebra, que é um software de geometria que permitiu construir os gráficos de uma forma dinâmica, bem como o Microsoft Excel, para efetuar análise através de tabelas dinâmicas, formatar e reorganizar os dados de forma a serem interpretados de forma mais acessível, objetiva e clara.

O desenvolvimento deste projeto proporcionou-me um grande enriquecimento profissional, uma vez que desde sempre senti a necessidade e a satisfação de construir materiais didáticos digitais de apoio ao ensino/aprendizagem dos alunos de modo a incentivar e estimular o gosto pela disciplina e promover o respetivo sucesso.

Os resultados obtidos e as perceções retiradas deste estudo referem-se a esta amostra, trinta e dois alunos do 8º ano de escolaridade, com constrangimento de recursos materiais, ao longo do ano letivo. Logicamente que, noutro contexto e com os recursos tecnológicos necessários, o estudo poderia levar a conclusões mais profícuas. Por esse motivo é fundamental continuar a realizar estudos deste género, em contextos diversos, para se poder fundamentar e validar este tipo de estratégias que visam a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. É pertinente que, no futuro, se divulguem junto dos docentes estas ferramentas e se promova formação adequada à sua concretização, para que estes possam beneficiar de todo o potencial pedagógico deste tipo de recurso.

A investigação desenvolvida não termina aqui o seu impacto; procuram-se novos horizontes no seguimento do que foi feito. Projetam-se, desde já, novas fases, uma vez que é importante que os MGQ criados, num futuro próximo, sejam utilizados por alunos e avaliada a sua implementação no sucesso dos mesmos. Existem várias pontas soltas relativas à temática central desta dissertação, que dão a possibilidade de continuar a melhorar e a desenvolver o trabalho.

Referências

[1] S. Deterding, R. Khaled, L. E. Nacke e D. Dixon, «Gamification: Toward a Definition», 2011.

[2] K. Kapp, *The Gamification of Learning and Instruction: Game-based Methods and Strategies for Training and Education*, Pfeiffer, ed. 2012.

[3] C. Su e C.Cheng, «A mobile gamification learning system, for improving the learning motivation and achievements», *Journal of Computer Assisted Learning*, n.º 31, 2015.

[4] F. Groh, «Gamification: State of the Art Definition and Utilization», U. University, ed., 2012.

[5] A. Marczewski, *Gamification: A Simple Introduction*, E. Editora, ed. 2013.

[6] A. V. J Simões RDA Redondo, «A social gamification framework for a K-6 learning platform», C. in Human Behavior, ed., 2013.

[7] R. Paharia. (2015). Bunchball: Gamification Blog: Gamification Trends to Watch in 2015, URL: `http://www.bunchball.com/blog/post/1616/5-gamification-trends-watch-2015`.

[8] J. Lee e J. Hammer, «Gamification in education: what, how, why bother?», A. E. Quarterly, ed., 2011.

[9] R. Callan e R. Landers, *Casual social games as serious games: the psychology of gamification in undergraduate education and employee training*. 2011.

[10] J. McGonigal, *Reality is broken: Why games make us better and how they can change the world*. 2011.

[11] C. I. Muntean. (2011).

[12] F. Bellotti, R. Berta, A. D. Gloria, E. Lavagnino, M. Dagnino e A.Antonaci, «A gamified short course for promoting entrepreneurship among ICT engineering students», I. 13th International Conference on Advanced Learning Technologies, ed., 2013. URL: `http://dx.doi.org/10.1109/ICALT.2013.14`.

[13] J. Ponte, J. Brocardo e H. Oliveira, *Investigações Matemáticas na sala de aula*, B. Horizonte-MG, ed. 2005.

[14] M. Hanus e J. Fox, «Assessing the effects of gamification in the classroom: A longitudinal study on intrinsic motivation, social comparison, satisfaction, effort, and academic performance», *Computers & Education*, 2014.

[15] D. G. de Inovação e Desenvolvimento Curricular, ed., *Programa e Metas Curriculares de Matemática -Ensino Básico*, 2013.

[16] D. G. de Inovação e Desenvolvimento Curricular, ed., *Aprendizagens Essenciais - Matemática*, 2017.

[17] U. de Aveiro. (2017). Relatório CNC, URL: `http://pmate.ua.pt/pmate/relatorios/2016/relatorio_CNC_2016_PmatE_UA.pdf`.

[18] S. Pais, I. Cabrita e A. Anjo, «A plataforma PmatE e o desenvolvimento de apetências em Matemática», *Indagatio Didactica*, vol. 6, n.º 1, U. de Aveiro, ed., 2014.

[19] D. G. de Inovação e Desenvolvimento Curricular, ed., *Programa de Matemática do Ensino Básico*, 2007.

[20] F. R. D. Agudo, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, E. Editora, ed. 1996.

[21] J. Camejo, A. Silva, L. Descalço e P. Oliveira, «Modelmaker, a multidisciplinary web application to build question generator models from basic to higher education», U. of Aveiro, ed., 2017.

[22] I. Caponetto, J. Earp e M. Ott, *Gamification and Education: a Literature Review.* 2014.

[23] L. Seixas, A. Gomes e I. Filho, *Effectiveness of gamification in the engagement of students, Computers in Human Behavior.* 2015.

[24] L. Marcos, E. Gracia-Lopez e A. Garcia-Cabot, «On the effectiveness of game-like and social approaches in learning: Comparing educational gaming, gamification & social networking», *Computers & Education*, 2015.

[25] J. Martí-Parreño, D. Seguí-Mas e E. Seguí-Mas, *Teachers' Attitude towards and Actual Use of Gamification.* 2016.

[26] E. Pimenta e C. Vieira, *Tarefas de investigação para promover a comunicação matemática.* 2017.

[27] M. R. Abdulmagide, *Lições teórico-práticas de Álgebra Linear*, E. Contraponto, ed. 1990.

[28] E. Giraldes, V. Fernandes e M. Smith, *Curso de álgebra Linear e Geometria Analítica*, McGraw-Hill, ed. 1995.

[29] A. Monteiro, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, McGraw-Hill, ed. 2001.

[30] J. Barbosa, *Noções sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares*, F. edições, ed. 2011.

[31] M. Ferreira e I. Amaral, *Álgebra Linear – Matrizes e Determinantes*, E. Sílabo, ed. 2012, vol. I.

[32] A. S. e J. Queirós, *Introdução à Álgebra Linear*, Gradiva, ed. 2014.

[33] R. Gonçalves, *Álgebra Linear – Teoria e Prática*, E. Sílabo, ed. 2015.

[34] A. Monteiro, I. Matos e V. Miranda, *Matrizes – Caderno de Matemática n.º 6*, E. Orion, ed. 2016.

[35] A. Silva e M. Neves, *Matemática 8*, P. Editora, ed. 2014.

[36] B. Costa e E. Rodrigues, *Novo Espaço 8*, P. Editora, ed. 2014.

[37] A. Conceição e M. Almeida, *Matematicamente falando 8*, A. Editora, ed. 2014.

[38] Sharelatex. (2017). Sharelatex, URL: `https://pt.sharelatex.com/learn/`.

Anexos

Modelo gerador de questões 2

Neste exercício pretende-se que os alunos reconheçam sistemas equivalentes, identifiquem a solução do sistema de diferentes formas e constatem que, dado um par ordenado $(x_0; y_0)$, este pode ser solução da primeira equação, mas não da segunda, logo não ser solução do sistema.

Após catalogar o modelo, foi inserido o respetivo enunciado:

$$\text{Considera o sistema de equações} \quad \begin{cases} a_1 a + b_1 b = c_1 \\ a_2 a + b_2 b = c_2 \end{cases}$$

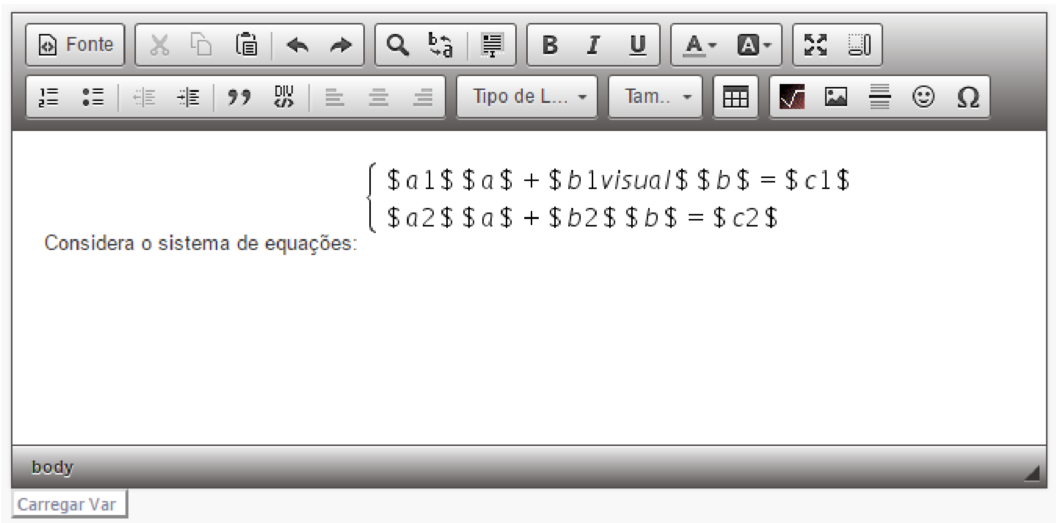


Figura A.1: Enunciado do MGQ 2

Neste caso são definidos os parâmetros $a, b, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ e c_2. Os valores escolhidos são:

- a - letra associada à primeira incógnita, que pode tomar o valor "a", "x" ou "m";
- b - letra associada à segunda incógnita, que pode tomar o valor "b", "y" ou "n";

- a_1 - números inteiros entre 4 e 6;
- b_1 - números inteiros entre 1 e 3;
- c_1 - números inteiros entre -2 e 5;
- a_2 - números inteiros entre -3 e 6;
- b_2 - números inteiros entre 2 e 3;
- c_2 - números inteiros entre 3 e 5;
- $b_1visual$ - variável condicional associada à variável b_1, para que o valor 1 não seja impresso.

Afirmações parametrizadas:

Afirmação 1:

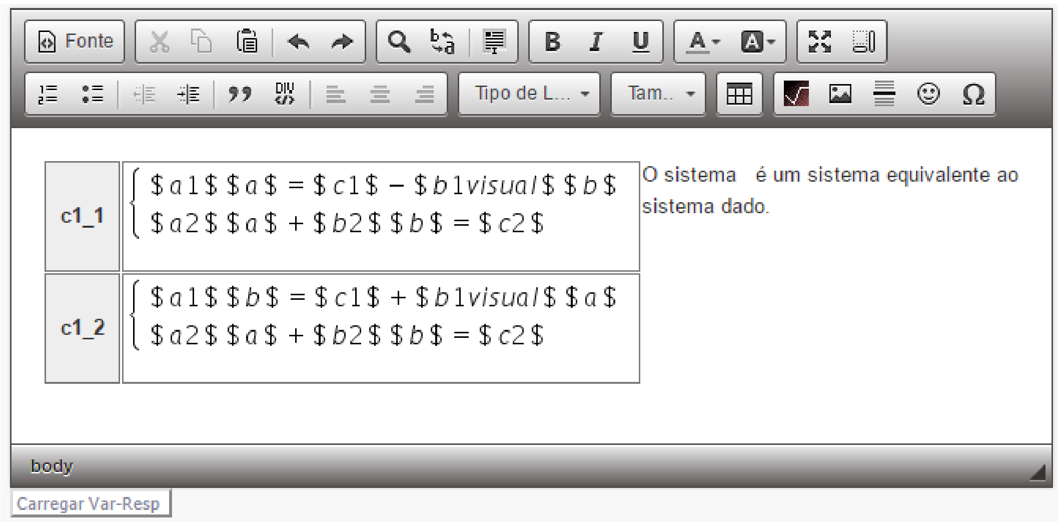


Figura A.2: Afirmação 1

Esta afirmação é verdadeira sempre que a célula selecionada aleatoriamente seja a $c1\_1$:

Figura A.3: Validação da afirmação 1

Afirmação 2:

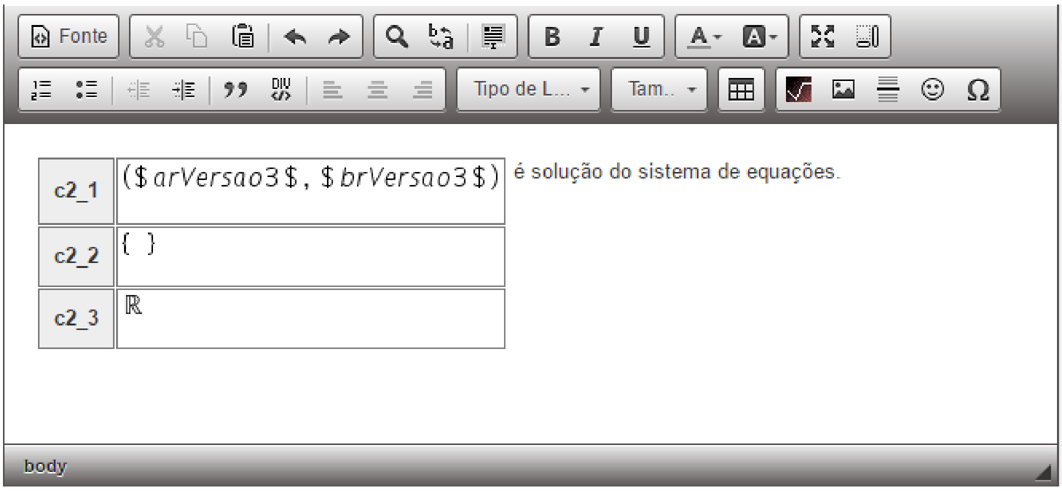


Figura A.4: Afirmação 2

Foram adicionadas as variáveis auxiliares $arVersao_3$ e $brVersao_3$, com os cálculos da determinação das incógnitas. Para garantir a apresentação de números não inteiros sob a forma de fração, estas variáveis são do tipo "Função matemática Python".

A variável $arVersao_3$ é o resultado da função $\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$, e a variável $brVersao_3$ é o resultado da função $\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

Procede-se então à validação da afirmação, com as seguintes condições:

- Seja apresentada a célula $c2\_1$ e a variável auxiliar d seja diferente de 0;
- Seja apresentada a célula $c2\_2$, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja diferente da variável auxiliar c;
- Seja apresentada a célula $c2\_3$, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar b e a variável auxiliar a seja igual à variável auxiliar c;

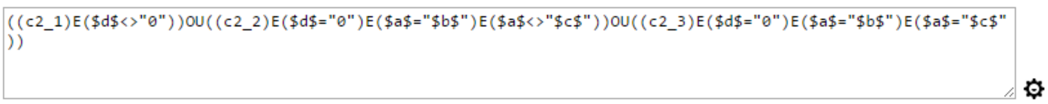


Figura A.5: Validação da afirmação 2

Afirmação 3:

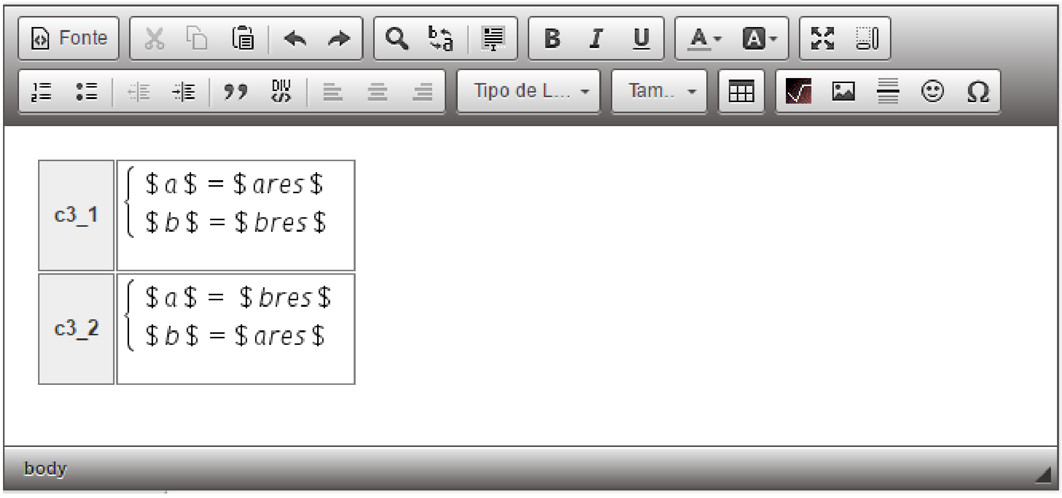


Figura A.6: Afirmação 3

Foram adicionadas as variáveis auxiliares $ares$, que é o resultado da função $\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$, e $bres$, que é o resultado da função $\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

Esta afirmação é verdadeira caso seja apresentada a célula $c3\_1$, ou a variável auxiliar $ares$ seja igual à variável auxiliar $bres$.

Figura A.7: Validação da afirmação 3

Afirmação 4:

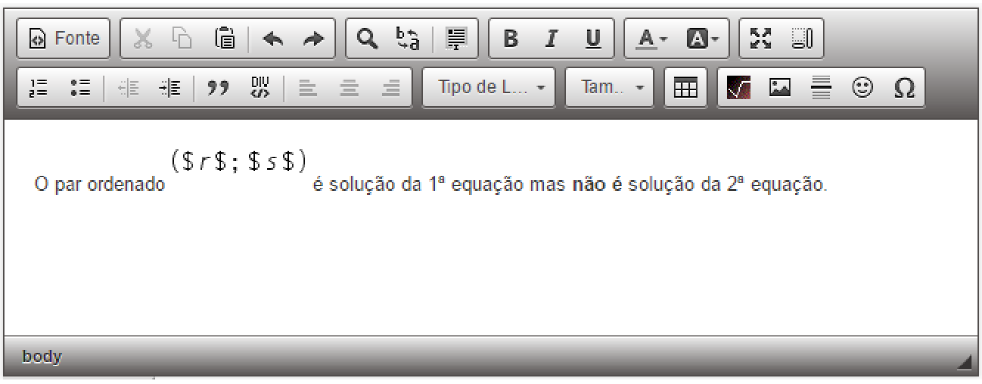


Figura A.8: Afirmação 4

Foram adicionadas as variáveis r, s, p e q, cujos valores escolhidos são:

- r - números inteiros entre -1 e 0;
- s - números inteiros entre -4 e -3;
- p - resultado da função matemática $a_1 r + b_1 s$;
- q - resultado da função matemática $a_2 r + b_2 s$.

Esta afirmação é verdadeira caso a variável p seja igual à variável c_1, e a variável q seja igual à variável c_2.

```
($p$="$c1$")E($q$<>"$c2$")
```

Figura A.9: Validação da afirmação 4

Para o Modelo Gerador de Questões 2 foram então definidas as seguintes variáveis:

Descrição variáveis

Nome	Tipo	Subtipo	Valor	Valor Limite	Casas Decimais
`$a1$`	Inteiro	intervalo/lista	4	6	null
`$c1$`	Inteiro	intervalo/lista	-2	5	null
`$a$`	Texto	igual/lista de valores	`{a\x\m}`	null	null
`$b$`	Texto	igual/lista de valores	`{b\y\n}`	null	null
`$a2$`	Inteiro	intervalo/lista	2	3	null
`$b1$`	Inteiro	intervalo/lista	1	3	null
`$b2$`	Inteiro	intervalo/lista	3	5	null
`$c2$`	Inteiro	intervalo/lista	1	3	null
`$ares$`	Cálculo com Python	Código	`def output(): return mathml(sp.Rational($b2$*$c1$-$b1$*$c2$,$a1$*$b2$-$a2$*$b1$))`	null	null
`$bres$`	Cálculo com Python	Código	`def output(): return mathml(sp.Rational($a1$*$c2$-$a2$*$c1$,$a1$*$b2$-$a2$*$b1$))`	null	null
`$br$`	Cálculo com Python	Código	`def output(): return mathml(sp.Rational($a1$*$c2$-$a2$*$c1$,$a1$*$b2$-$a2$*$b1$))`	null	null
`$arVersao3$`	Cálculo com Python	Código	`def output(): return mathml(sp.Rational($b2$*$c1$-$b1$*$c2$,$a1$*$b2$-$a2$*$b1$))`	null	null
`$brVersao3$`	Cálculo com Python	Código	`def output(): return mathml(sp.Rational($a1$*$c2$-$a2$*$c1$,$a1$*$b2$-$a2$*$b1$))`	null	null
`$w$`	Inteiro	intervalo/lista	1	2	null
`$v$`	Inteiro	intervalo/lista	-1	0	null
`$r$`	Inteiro	intervalo/lista	-1	0	null
`$s$`	Inteiro	intervalo/lista	-4	-3	null
`$p$`	Função Matemática	Fórmula	`$a1$*$r$+$b1$*$s$`	null	
`$q$`	Função Matemática	Fórmula	`$a2$*$r$+$b2$*$s$`	null	
`$b1visual$`	Função Dependência	Condições	3	null	null

Figura A.10: Variáveis definidas do MGQ 2

Concretização 1:

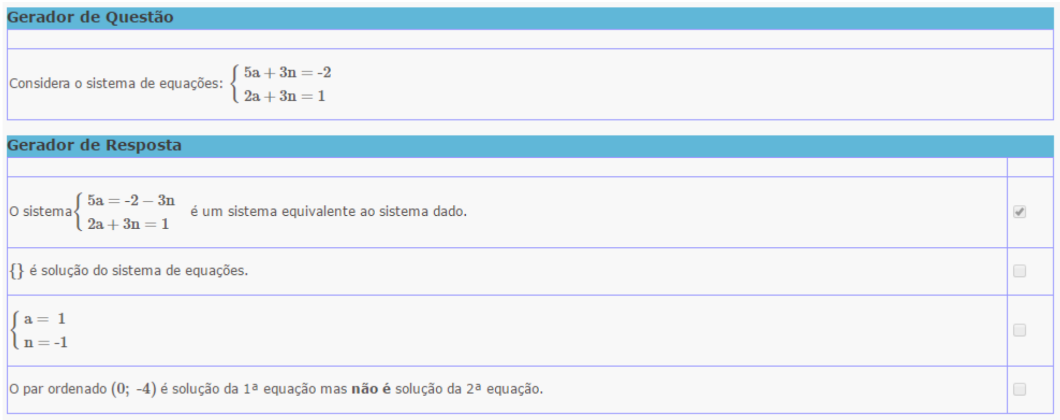


Figura A.11: Concretização 1

Concretização 2:

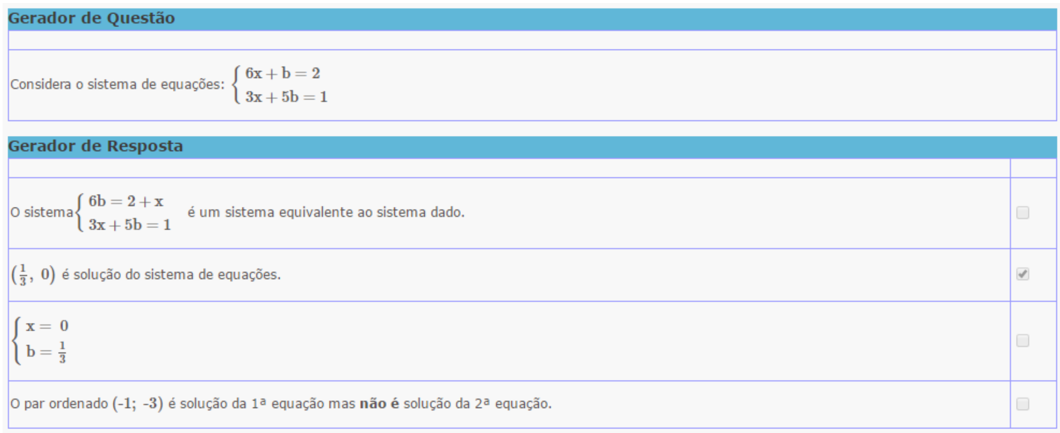


Figura A.12: Concretização 2

Modelo gerador de questões 3

Neste exercício pretende-se que os alunos reconheçam sistemas equivalentes, classifiquem o sistema como «sistema impossível», «sistema possível e determinado» ou «sistema possível e indeterminado», identifiquem a posição relativa de duas retas no plano e interpretem geometricamente um sistema de duas equações do primeiro grau.

Após catalogar o modelo, foi inserido o respetivo enunciado:

Considera o sistema de equações $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

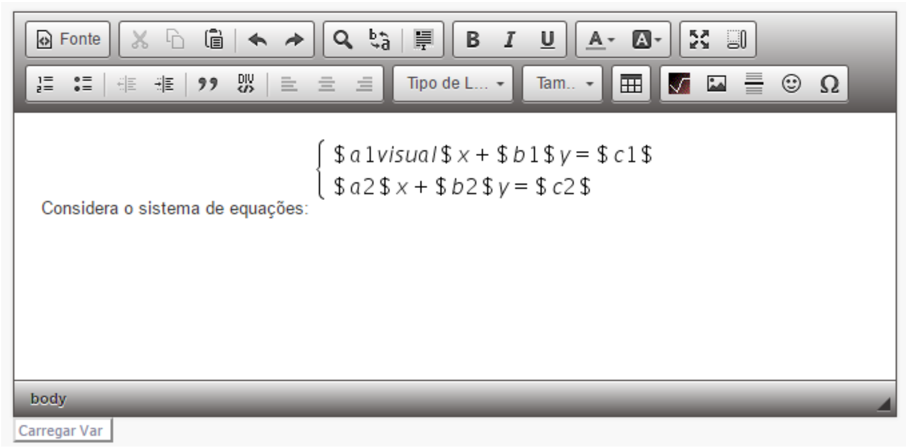


Figura A.13: Enunciado do MGQ 3

Neste caso são definidos os parâmetros a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2. Os valores escolhidos são:

- a_1 - números inteiros entre 1 e 4;
- b_1 - números inteiros entre 2 e 4;
- c_1 - números inteiros entre 1 e 3;
- a_2 - números inteiros entre 2 e 5;
- b_2 - números inteiros entre 2 e 3;
- c_2 - números inteiros entre 1 e 7;
- $a_1visual$ - variável condicional associada à variável a_1, para que o valor 1 não seja impresso.

Afirmações parametrizadas:

Afirmação 1:

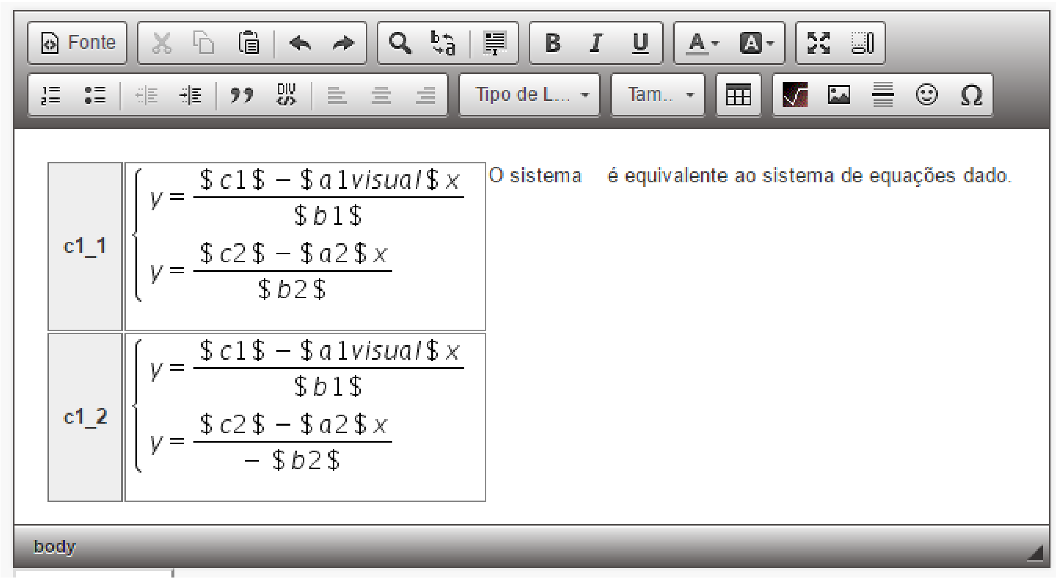


Figura A.14: Afirmação 1

Esta afirmação é verdadeira sempre que a célula selecionada aleatoriamente seja a $c1\_1$:

Figura A.15: Validação da afirmação 1

Afirmação 2:

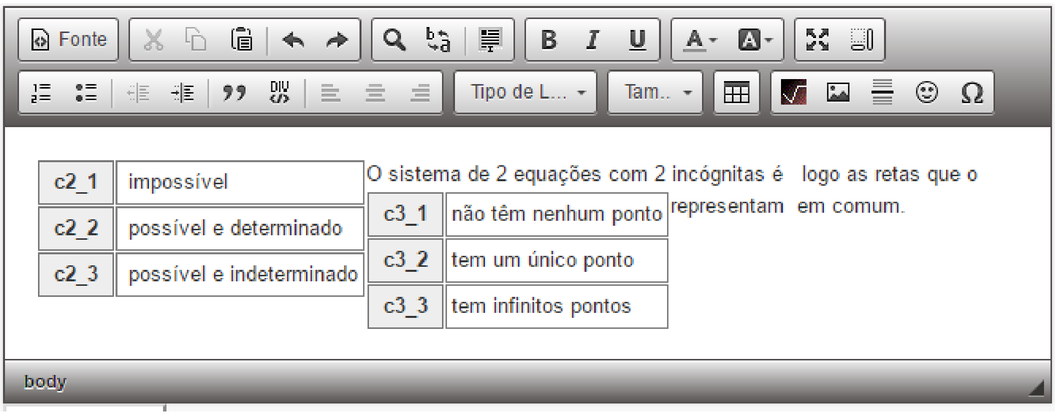


Figura A.16: Afirmação 2

Procede-se então à validação da afirmação, com as seguintes condições:

- Sejam apresentadas a células $c2\_1$ e $c3\_1$, a variável auxiliar d seja diferente de 0, a variável a seja igual à variável b e a variável a seja diferente da variável c;
- Sejam apresentadas a células $c2\_2$ e $c3\_2$ e a variável auxiliar d seja diferente de 0;
- Sejam apresentadas a células $c2\_3$ e $c3\_3$, a variável auxiliar d seja igual a 0, a variável a seja igual à variável b e a variável a seja igual à variável c.

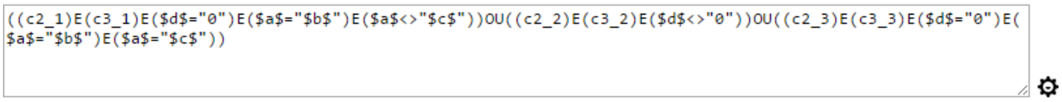


Figura A.17: Validação da afirmação 2

Afirmação 3:

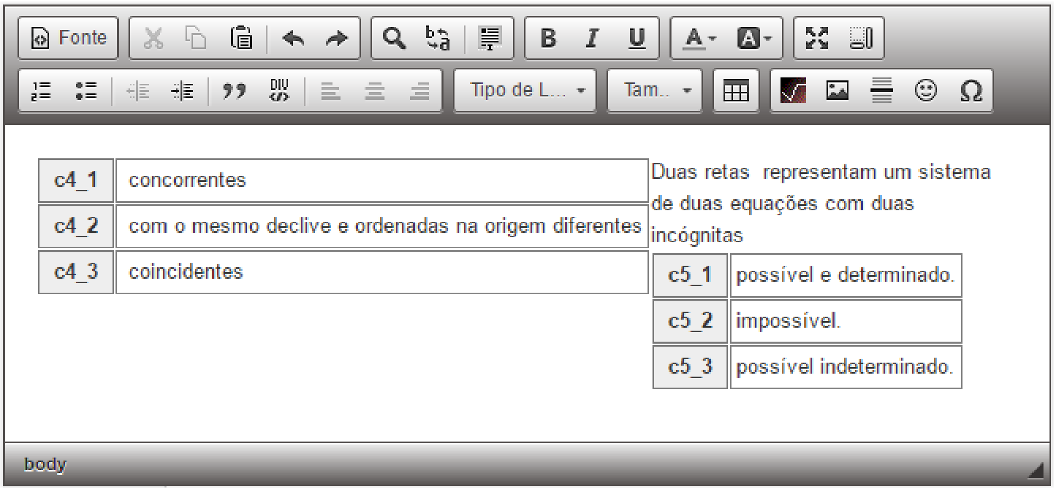


Figura A.18: Afirmação 3

Validação da afirmação 3:

- Sejam apresentadas as células $c4\_1$ e $c5\_1$;
- Sejam apresentadas as células $c4\_2$ e $c5\_2$;
- Sejam apresentadas as células $c4\_3$ e $c5\_3$.

Figura A.19: Validação da afirmação 3

Afirmação 4:

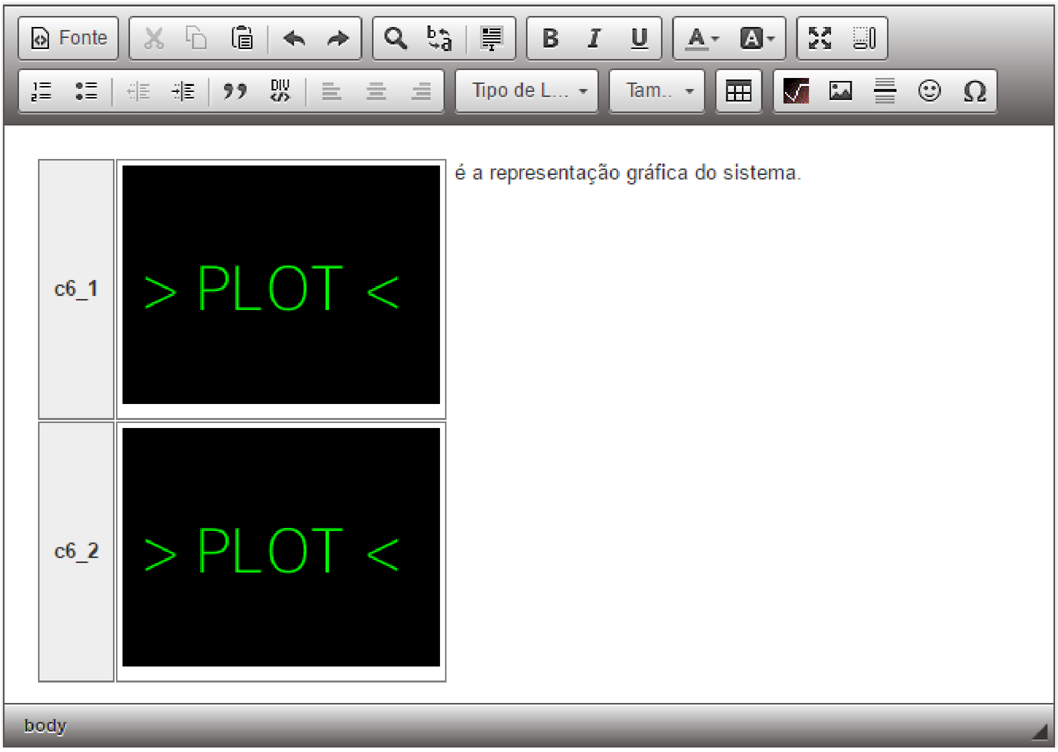


Figura A.20: Afirmação 4

Para a construção desta afirmação são utilizados dois gráficos, construídos recorrendo ao software Geogebra.

Esta afirmação é sempre verdadeira.

Figura A.21: Validação da afirmação 4

Para o Modelo Gerador de Questões 3 foram então definidas as seguintes variáveis:

Descrição variáveis

<table>
<tr><th>Nome</th><th>Tipo</th><th>Subtipo</th><th>Valor</th><th>Valor Limite</th><th>Casas Decimais</th></tr>
<tr><td>$c1$</td><td>Inteiro</td><td>intervalo/lista</td><td>1</td><td>3</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$b1$</td><td>Inteiro</td><td>intervalo/lista</td><td>2</td><td>5</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$c2$</td><td>Inteiro</td><td>intervalo/lista</td><td>1</td><td>7</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$a2$</td><td>Inteiro</td><td>intervalo/lista</td><td>2</td><td>5</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$b2$</td><td>Inteiro</td><td>intervalo/lista</td><td>2</td><td>3</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$a1$</td><td>Inteiro</td><td>intervalo/lista</td><td>1</td><td>4</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$grafico1$</td><td>Plotting com Python</td><td>Código</td><td>a=[] b=[] c=[] for x in range(-3,8,1): y = ($c1$-$a1$*x)/$b1$ z = ($c2$-$a2$*x)/$b2$ a.append(x) b.append(y) c.append(z) eixos = plt.gca() eixos.spines['right'].set_color('none') eixos.spines['top'].set_color('none') eixos.spines['left'].set_position(('data',0)) eixos.spines['bottom'].set_position('zero') plt.ylim((-3,6)) plt.xlim((-3,7)) arrow_length = 8 plt.annotate('', xy=(1, 0), xycoords=('axes fraction', 'data'), xytext=(arrow_length, 0), textcoords='offset points', arrowprops=dict(arrowstyle='<|-', fc='black')) plt.annotate('', xy=(0, 1), xycoords=('data', 'axes fraction'), xytext=(0, arrow_length), textcoords='offset points', arrowprops=dict(arrowstyle='<|-', fc='black')) xticks = eixos.xaxis.get_major_ticks() xticks[-5].label1.set_visible(False) yticks = eixos.yaxis.get_major_ticks() yticks[3].label1.set_visible(False) eixos.text(-0.2, -0.25, "0", horizontalalignment = 'center', verticalalignment = 'center') eixos.text(7.2, -0.2, "x", horizontalalignment = 'center', verticalalignment = 'center') eixos.text(-0.1, 6.4, "y", horizontalalignment = 'center', verticalalignment = 'center') #plt.suptitle('TITLE', fontsize=15) eixos.grid() plt.plot(a,b) plt.plot(a,c)</td><td>null</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$grafico2$</td><td>Plotting com Python</td><td>Código</td><td>a=[] b=[] c=[] for x in range(-3,8,1): y = ($c1$/$b1$)*x-($a1$/$b1$) z = (-$a2$/$b2$)*x+($c2$/$b2$) a.append(x) b.append(y) c.append(z) eixos = plt.gca() eixos.spines['right'].set_color('none') eixos.spines['top'].set_color('none') eixos.spines['left'].set_position(('data',0)) eixos.spines['bottom'].set_position('zero') plt.ylim((-3,6)) plt.xlim((-3,7)) arrow_length = 8 plt.annotate('', xy=(1, 0), xycoords=('axes fraction', 'data'), xytext=(arrow_length, 0), textcoords='offset points', arrowprops=dict(arrowstyle='<|-', fc='black')) plt.annotate('', xy=(0, 1), xycoords=('data', 'axes fraction'), xytext=(0, arrow_length), textcoords='offset points', arrowprops=dict(arrowstyle='<|-', fc='black')) xticks = eixos.xaxis.get_major_ticks() xticks[-5].label1.set_visible(False) yticks = eixos.yaxis.get_major_ticks() yticks[3].label1.set_visible(False) eixos.text(-0.2, -0.25, "0", horizontalalignment = 'center', verticalalignment = 'center') eixos.text(7.2, -0.2, "x", horizontalalignment = 'center', verticalalignment = 'center') eixos.text(-0.1, 6.4, "y", horizontalalignment = 'center', verticalalignment = 'center') #plt.suptitle('TITLE', fontsize=15) eixos.grid() plt.plot(a,b) plt.plot(a,c)</td><td>null</td><td>null</td></tr>
<tr><td>$a1visual$</td><td>Função Dependência</td><td>Condições</td><td></td><td>null</td><td>null</td></tr>
</table>

Figura A.22: Variáveis definidas do MGQ 3

Concretização 1:

Gerador de Questão

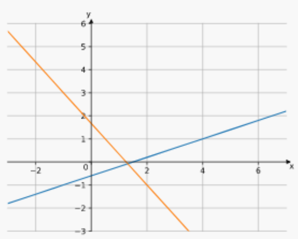
Considera o sistema de equações: $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

Gerador de Resposta

O sistema $\begin{cases} y = \frac{2-3x}{5} \\ y = \frac{5-4x}{3} \end{cases}$ é equivalente ao sistema de equações dado. ☑

O sistema de 2 equações com 2 incógnitas é possível e indeterminado logo as retas que o representamtem infinitos pontos em comum. ☐

Duas retas concorrentes representam um sistema de duas equações com duas incógnitas possível indeterminado. ☐



é a representação gráfica do sistema. ☑

Figura A.23: Concretização 1

Concretização 2:

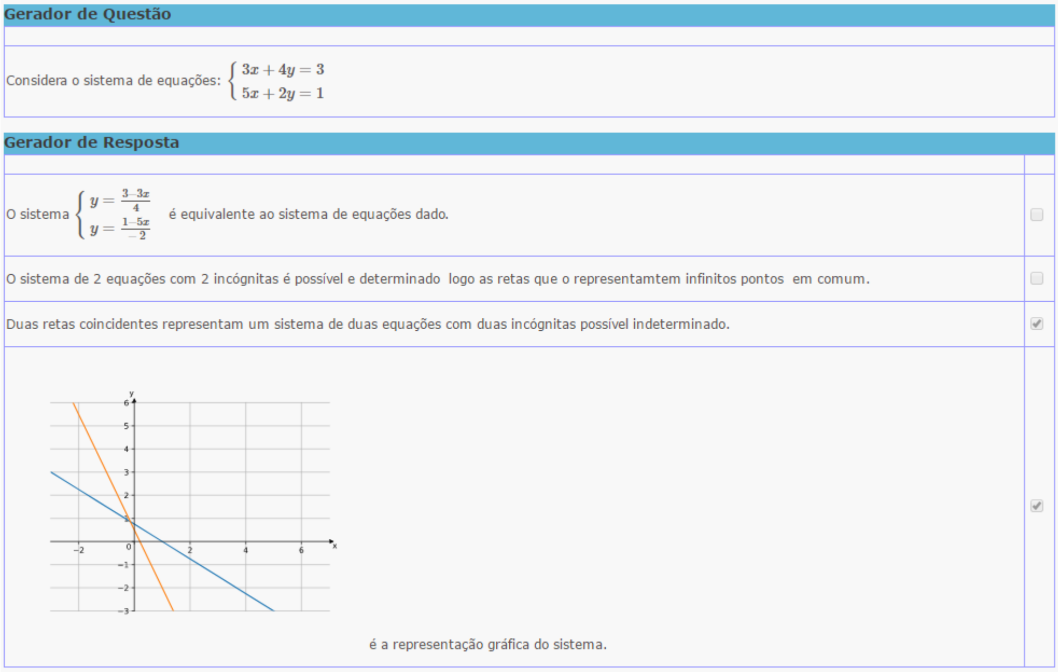


Figura A.24: Concretização 2

MODELO GERADOR DE QUESTÕES 4

Neste exercício pretende-se que os alunos resolvam problemas utilizando sistemas de equações lineares, analisando as soluções destes no contexto apresentado.

Após catalogar o modelo, foi inserido o respetivo enunciado:

No intervalo, o Rodrigo / a Francisca / a Beatriz deslocou-se ao bar / à máquina automática da escola / do filme / do jogo de futebol e comprou mais $dfQuant$ bolos do que sumos.

No total pagou $total$.

Cada bolo custou $precoX$ e cada sumo custou $precoY$.

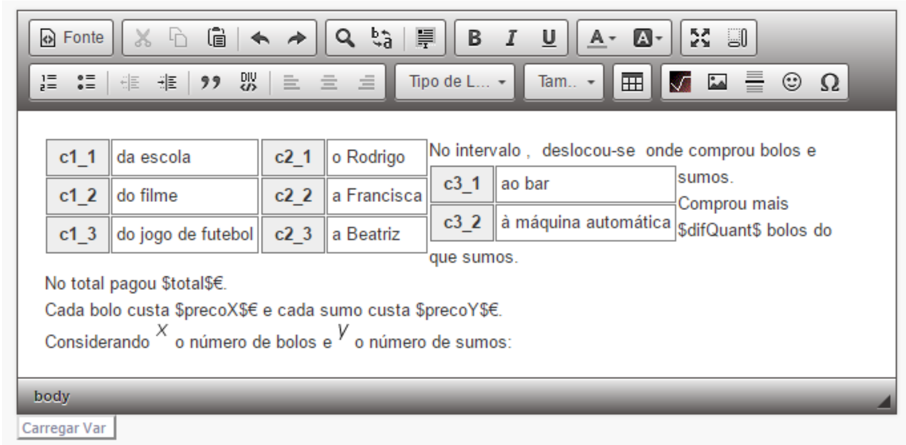


Figura A.25: Enunciado do MGQ 4

Neste caso são definidos vários parâmetros. Os valores escolhidos são:

- $auxPrecoX$ - números inteiros entre 5 e 10;
- $auxPrecoY$ - números inteiros entre 7 e 12;
- $precoX$ - resultado da função matemática $0,1auxPrecoX$;
- $precoY$ - resultado da função matemática $0,1auxPrecoY$;
- $difQuant$ - números inteiros entre 2 e 5;
- $total$ - resultado da função matemática $xprecoX + yprecoY$.

Afirmações parametrizadas:

Afirmação 1:

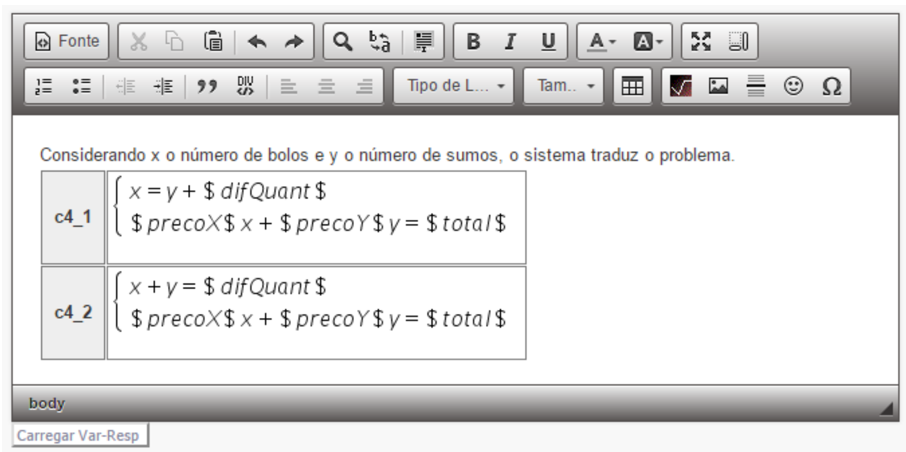


Figura A.26: Afirmação 1

Esta afirmação é verdadeira sempre que a célula selecionada aleatoriamente seja a $c4\_1$:

Figura A.27: Validação da afirmação 1

Afirmação 2:

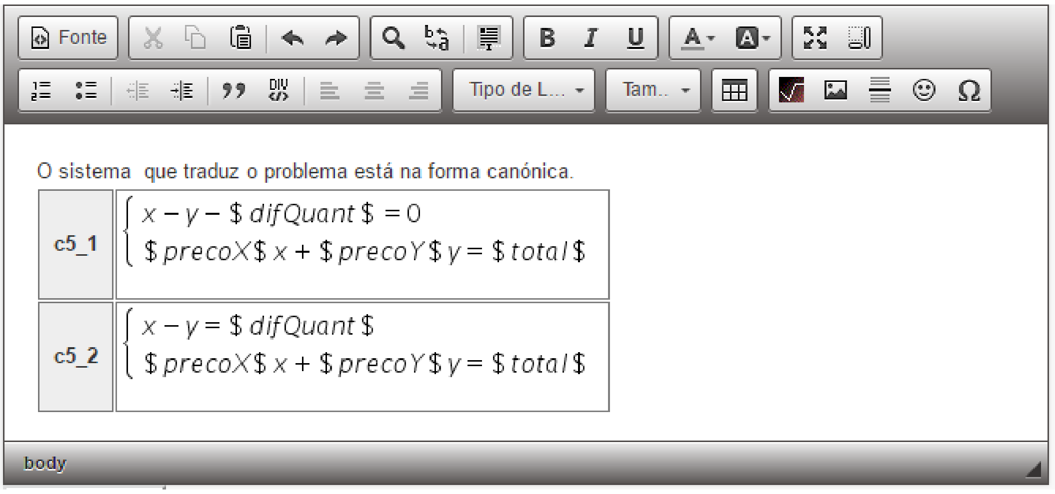


Figura A.28: Afirmação 2

Esta afirmação é verdadeira sempre que a célula selecionada aleatoriamente seja a $c5\_1$:

Figura A.29: Validação da afirmação 2

Afirmação 3:

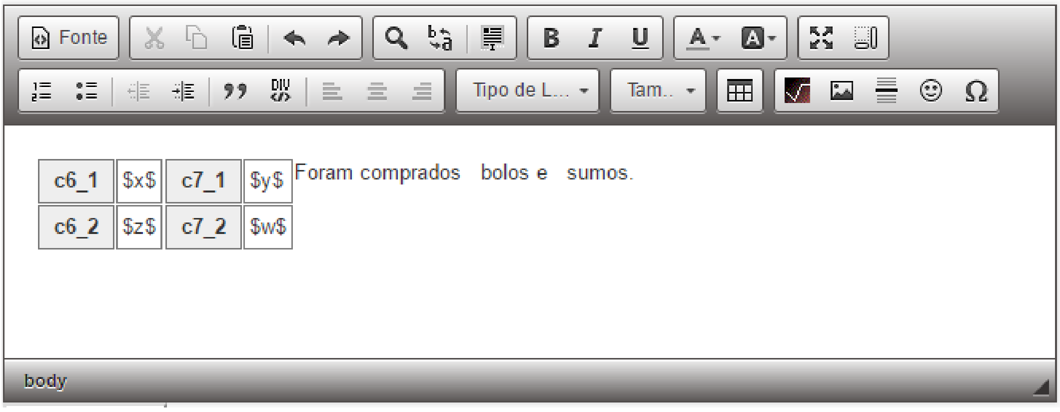


Figura A.30: Afirmação 3

Para esta afirmação são definidos vários parâmetros. Os valores escolhidos são:

- x - números inteiros entre 7 e 10;
- y - resultado da função matemática $x - difQuant$;
- z - resultado da função matemática $x + 1$;
- w - resultado da função matemática $y + 1$.

Esta afirmação é verdadeira sempre que as células selecionadas aleatoriamente sejam a $c6\_1$ e $c7\_1$:

Figura A.31: Validação da afirmação 3

Afirmação 4:

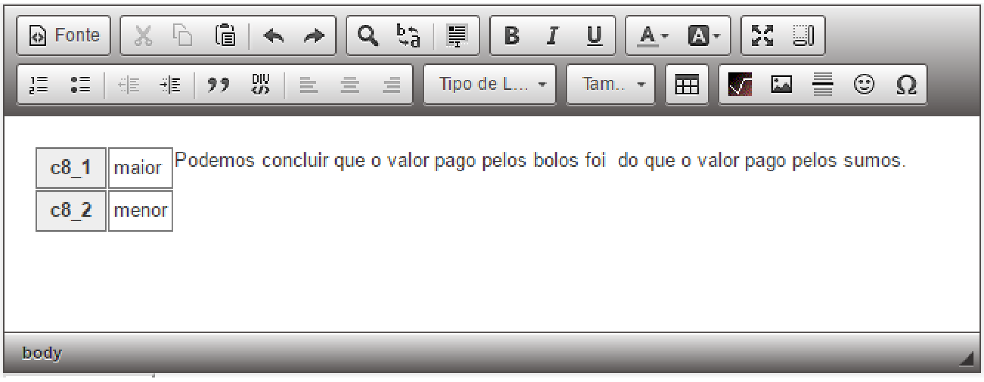


Figura A.32: Afirmação 4

Para esta afirmação são definidos vários parâmetros. Os valores escolhidos são:

- *totalX* - resultado da função matemática *xprecoX*;
- *totalY* - resultado da função matemática *yprecoY*.

Validação da afirmação 4:

- Seja apresentada a célula *c*8_1 e a variável *totalX* seja superior à variável *totalY*;
- Seja apresentada a célula *c*8_2 e a variável *totalX* seja inferior à variável *totalY*.

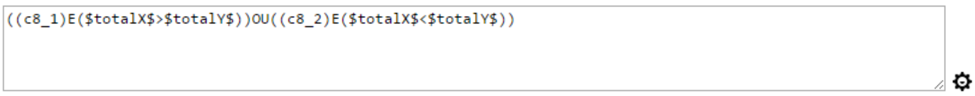
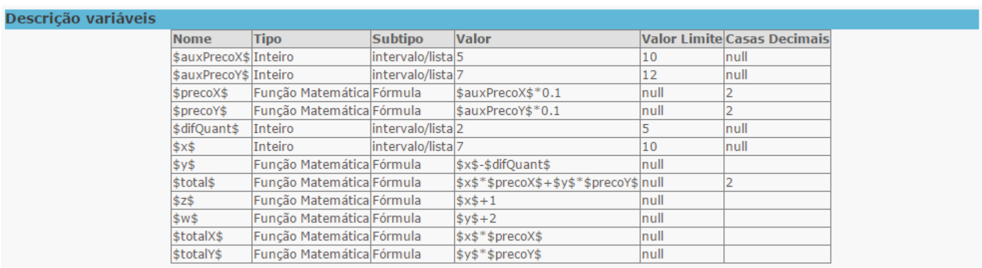


Figura A.33: Validação da afirmação 4

Para o Modelo Gerador de Questões 4 foram então definidas as seguintes variáveis:



Descrição variáveis

Nome	Tipo	Subtipo	Valor	Valor Limite	Casas Decimais
$auxPrecoX$	Inteiro	intervalo/lista	5	10	null
$auxPrecoY$	Inteiro	intervalo/lista	7	12	null
$precoX$	Função Matemática	Fórmula	$auxPrecoX$*0.1	null	2
$precoY$	Função Matemática	Fórmula	$auxPrecoY$*0.1	null	2
$difQuant$	Inteiro	intervalo/lista	2	5	null
x	Inteiro	intervalo/lista	7	10	null
y	Função Matemática	Fórmula	x-$difQuant$	null	
$total$	Função Matemática	Fórmula	x*$precoX$+y*$precoY$	null	2
z	Função Matemática	Fórmula	x+1	null	
w	Função Matemática	Fórmula	y+2	null	
$totalX$	Função Matemática	Fórmula	x*$precoX$	null	
$totalY$	Função Matemática	Fórmula	y*$precoY$	null	

Figura A.34: Variáveis definidas do MGQ 4

Concretização 1:

Gerador de Questão

No intervaloda escola ,a Beatriz deslocou-seao bar onde comprou bolos e sumos.
Comprou mais 4 bolos do que sumos.
No total pagou 9,60€.
Cada bolo custa 0,60€ e cada sumo custa 1,20€.
Considerando x o número de bolos e y o número de sumos:

Gerador de Resposta

Considerando x o número de bolos e y o número de sumos, o sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ 0{,}60x+1{,}20y=9{,}60 \end{cases}$ traduz o problema.	☐
O sistema que traduz o problema está na forma canónica. $\begin{cases} x-y-4=0 \\ 0{,}60x+1{,}20y=9{,}60 \end{cases}$	☐
Foram comprados 8 bolos e 4 sumos.	☑
Podemos concluir que o valor pago pelos bolos foi maior do que o valor pago pelos sumos.	☐

Figura A.35: Concretização 1

Concretização 2:

Gerador de Questão

No intervalodo filme ,a Beatriz deslocou-seao bar onde comprou bolos e sumos.
Comprou mais 2 bolos do que sumos.
No total pagou 12,40€.
Cada bolo custa 0,60€ e cada sumo custa 0,80€.
Considerando x o número de bolos e y o número de sumos:

Gerador de Resposta

Considerando x o número de bolos e y o número de sumos, o sistema $\begin{cases} x=y+2 \\ 0{,}60x+0{,}80y=12{,}40 \end{cases}$ traduz o problema.	☑
O sistema que traduz o problema está na forma canónica. $\begin{cases} x-y=2 \\ 0{,}60x+0{,}80y=12{,}40 \end{cases}$	☑
Foram comprados 10 bolos e 10 sumos.	☐
Podemos concluir que o valor pago pelos bolos foi maior do que o valor pago pelos sumos.	☐

Figura A.36: Concretização 2